Entstehung von Galaxienhaufen und der großräumigen Struktur in dissipationslosen kosmologischen Simulationen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
in der Wissenschaftsdisziplin Astrophysik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

von
Alexander Knebe
(geboren am 31. Januar 1970 in Kiel)

Potsdam, im April 1999

Kapitel 1

Einleitung

Kosmologie, die Wissenschaft vom Universum, ist wahrscheinlich eine der ältesten Wissenschaften überhaupt. Seit wir den Blick in den Himmel gerichtet haben, stellen sich die Fragen, wie alles angefangen hat, warum alles angefangen hat und wie alles enden wird.

Diese Fragen waren immer schon die treibende Kraft, die zur Untersuchung und schließlich zu dem Verständnis führten, daß zur Beschreibung der Natur die bisher erlangten Grundlagen der relativistischen Gravitationstheorie und der Elementarteilchenprozesse und ihrer Wechselwirkungen, wie sie in irdischen Labors und innerhalb unseres Planetensystems erforscht wurden, eine tragfähige Basis bilden.

In der Kosmologie versucht man zum einen, den Ursprung des Universums zu verstehen, andererseits aber gleichzeitig auch die Ausbildung der größten beobachteten Strukturen wie z.B. der Galaxienhaufen, den großen Leerräumen im Universum und den filamentartigen Superhaufenstrukturen. Diese beiden Ziele können jedoch nicht getrennt voneinander verfolgt werden; zum Verständnis der Strukturbildung müssen ebenfalls die ersten Anfänge der Entwicklung des Universums in Betracht gezogen werden. Das Modell des inflationären Universums, das vor ca. 20 Jahren zur Erklärung der Anfangskeime der Strukturbildung entwickelt wurde, basiert auf einer semiklassischen Koppelung der Quantenfluktuationen mit der Metrik der Raumzeit, die letztendlich zu Fluktuationen im klassischen Dichtefeld führt (Bardeen, Steinhardt & Turner 1983). Erst die darauf folgende Entwicklung dieser Inhomogenitäten, die dann zur Ausbildung der beobachteten Strukturen führt, wird in erster Linie von der Gravitation allein bestimmt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Beiträge zur Erkenntnis der Entstehung und Entwicklung der größten Objekte des Universums wie Galaxiengruppen und Galaxienhaufen zu gewinnen. Dabei spielt die gewaltige Erweiterung der Beobachtungsbasis zur Kosmologie eine bahnbrechende Rolle. Sie fand ihre Anfänge in der grundlegenden Erkenntnis der Proportionalität von Rotverschiebung und Entfernung durch E. Hubble im Jahr 1929. Dadurch wurde das bis dahin bevorzugte Modell eines statischen Universums widerlegt. In Kapitel 2 werden einige Grundlagen und Begriffe der Kosmologie vorgestellt, wobei auch daran erinnert wird, daß nur für eine spezielle Wahl der von Einstein eingeführten Kosmologischen Konstanten Λ ein statisches Universum möglich ist. In allen anderen Fällen ist eine Expansion – so sie von E .Hubble gemessen wurde – unumgänglich, so daß man heute davon ausgehen kann, daß die Materie des Universum zu einem früheren Zeit-

punkt auf kleinstem Raum zusammengedrängt war. Die wohl wichtigste Grundlage der modernen Kosmologie ist die Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung durch Penzias & Wilson (1965) sowie der Fluktuationen dieser Strahlung selbst (Smoot et al. 1992), da ihre Existenz eine fundierte Grundlage für das Modell des heißen Urknalls (Hot-Big-Bang) darstellt. Die Gleichförmigkeit dieser Strahlung auf weniger als einige tausendstel Prozent zeigt uns, daß das Universum im Alter von ca. 300.000 Jahren (Zeitpunkt der letzten Streuung der Hintergrundstrahlung) als homogen angesehen werden kann. Lediglich winzige Fluktuationen im primordialen Dichtefeld, die sich in den Schwankungen der kosmischen Hintergrundstrahlung widerspiegeln, waren die Ursache für die gravitativ bedingte Ausbildung von Strukturen.

Eines der wohl wichtigsten Hilfsmittel zur Untersuchung und zum Verständnis der Strukturbildung ist die Verwendung von numerischen Simulationen. Erst durch die rasante Entwicklung der Computertechnik wurde die Möglichkeit geschaffen, realistische Modelle (mit physikalisch sinnvoller Auflösung) zur Entwicklung der Strukturen im Universum zu simulieren und die Ergebnisse mit Beobachtungsdaten zu vergleichen. In Kapitel 3 wird deshalb besonderer Wert auf das Verfahren zur Simulation selbst und in Kapitel 4 auf mögliche Fehlerquellen durch numerische Effekte gelegt. Diese Rechnungen starten dabei alle in der Epoche, als die kosmische Hintergrundstrahlung das letzte Mal gestreut wurde[1].

1.1 Beobachtungen zur Kosmologie

Vor der Beschreibung der Zielstellung und des Inhalts der Arbeit soll im folgenden ein Überblick über kosmologisch relevante Beobachtungen gegeben werden. Neben den bereits erwähnten Fluktuationen der Hintergrundstrahlung betrifft das Beobachtungen zu Galaxien, Galaxiengruppen und Galaxienhaufen und deren statistischer Auswertung. Doch auch heute sind wir weit davon entfernt, ein komplettes Bild vom Universum und der darin enthaltenen Materieverteilung zu haben. Ein grundlegendes Problem ist, das in den bisher vorliegenden Strukturuntersuchungen starke Fluktuationen zwischen den Ergebnissen aus verschiedenen Volumina auftreten. Das weist auf große Strukturen hin, deren Ausmaße über den Beobachtungsvolumina liegen und die sogenannte kosmische Varianz erhöhen. Auch gibt es Hinweise darauf, daß die 'Homogenitätsskala' (vgl. Kapitel 2) mit den bisherigen Durchmusterungen noch nicht erreicht wurde. Neue Rotverschiebungskataloge, die einen größeren Bereich als die bisherigen Beobachtungen abdecken, sind derzeit noch in Arbeit: Mit Hilfe des 2-Degree-Field-Survey (2dF) werden die Rotverschiebungen von ungefähr 250.000 Galaxien auf einer Fläche von 2000 deg^2 bestimmt werden, was einem Volumen von ca. $1-2\cdot10^7(h^{-1}\mathrm{Mpc})^3$ entspricht, wobei die mittlere Rotverschiebung der spektroskopierten Galaxien bei $z \simeq 0.1$ und die Grenzhelligkeit bei $b_j = 19.5$ mag liegt (z.B. Maddox 1998). Der Sloan-Digital-Sky-Survey (SDSS) soll sogar von in etwa einer Million Galaxien die Rotverschiebungen auf einer Fläche von 10.000 deg^2 in der nördlichen Hemisphäre messen, wobei bei einer Grenzhelligkeit von ca. 18.2 mag eine

[1] In der Praxis wird zunächst die lineare Störungstheorie verwendet, und man startet die numerische Rechnung, sobald nichtlineare Effekte zum Tragen kommen.

mittlere Tiefe von $300h^{-1}$Mpc erreicht wird, was ebenfalls einer Rotverschiebung $z \simeq 0.1$ entspricht (z.B. Szalay 1998). Mit den Daten dieser Projekte, deren Vollendung Anfang des kommenden Jahrtausends erwartet wird, ist man dann in der Lage, Strukturen auf Skalen $> 100\ h^{-1}$Mpc zu beobachten.

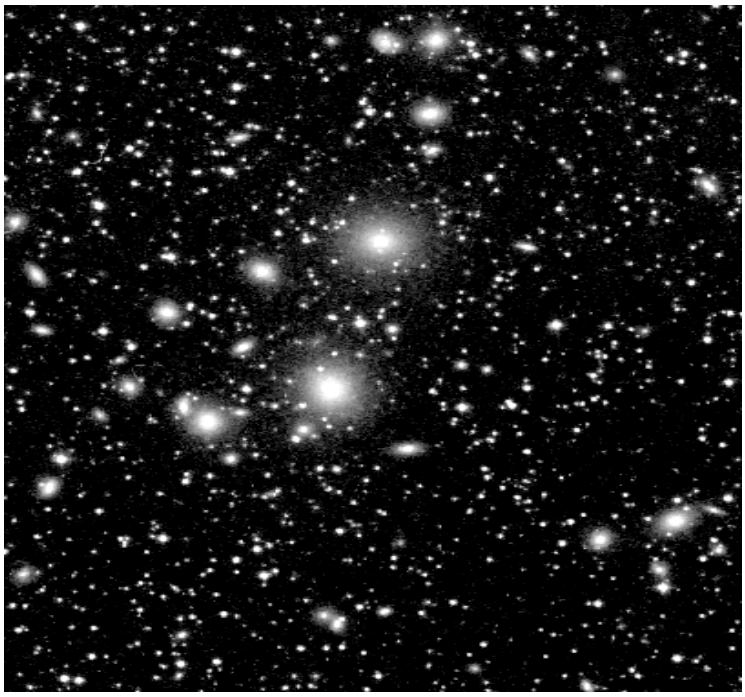
Galaxien

Galaxien sind die 'Leuchtfeuer', die es den Kosmologen ermöglichen, das Universum bis in ein sehr frühes und weniger differenziertes Stadium zurückzuverfolgen. Ging man im letzten Jahrhundert zunächst davon aus, daß es sich bei den 'Nebelflecken' um Gaswolken in unserer Milchstraße handelt (Ch. Messier), so erkannte man in den 20er Jahren unseres Jahrhunderts recht bald durch die Verwendung besserer Teleskope, daß diese Nebel in Wirklichkeit selbst aus Einzelsternen bestehen. So kam es dann auch zu den ersten Untersuchungen zu Galaxien selbst, die allerdings noch nicht in der Lage waren, Aussagen über die großräumige Struktur des Universum zu machen, da die Bestimmung der dritten Koordinate, der Entfernung, nicht möglich war, sowie die Anzahl der beobachteten Galaxien nicht ausreichte. Jedoch erlaubten sie eine Klassifizierung entsprechend der Morphologie, da man Galaxien unterschiedlichster Gestalt (Spiralgalaxien, Balkenspiralen, Elliptische Galaxien usw.) beobachten konnte. Auf diese Art und Weise entstand das Hubble-(Sandage-)Diagramm. Die mittlere Ausdehnung einer Galaxie entspricht dabei in etwa 10-30 kpc bei einer Masse von ca. 10^{11} Sonnenmassen. Anhand der Rotationskurven von (Spiral-)Galaxien erhielt man auch einen ersten Hinweis auf das Vorhandensein von Dunkler Materie[2], die sich lediglich durch ihre gravitative Wirkung bemerkbar macht. In der Kosmologie konnten große Fortschritte erzielt werden, als es möglich wurde, neben der Photometrie eine große Zahl von Galaxien zu spektroskopieren und aus der Rotverschiebung über die Hubble-Relation auf die Entfernung zu schließen. Allerdings vernachlässigt man dabei die pekuliaren Geschwindigkeiten der Galaxien, was besondere Effekte bewirkt, die in der weiteren Auswertung berücksichtigt werden müssen. Einige davon sind bei der Diskussion von Unterstrukturen in Galaxienhaufen erwähnt (vgl. Abschnitt 5.3).

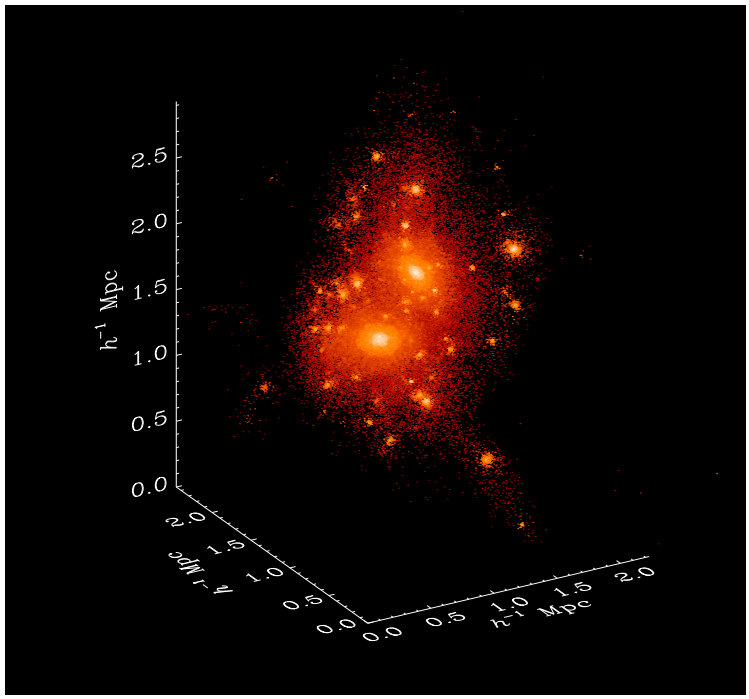
Galaxiengruppen und Galaxienhaufen

Galaxien gehören meistens übergeordneten Systemen an, die durch die wechselseitige Gravitationsanziehung ihrer Mitglieder zusammengehalten werden. Wir finden reiche Haufen mit mehreren Tausend Galaxien und kleinere Gruppen bis herunter zu Doppelgalaxien. Galaxienhaufen sind dabei die größten gravitativ gebundenen Systeme im Universum. Aus Beobachtungen zu Bahngeschwindigkeiten einzelner Galaxien in solchen Haufen weiß man, daß diese Objekte ebenfalls zu fast 80% aus Dunkler Materie bestehen müssen. Schon 1930 begann man mit der systematischen Durchmusterung der Verteilung der Galaxien an der Sphäre etwa durch H. Shapley, E. Hubble u.a.. Ende der 50er Jahre standen zwei Galaxienkataloge zur Verfügung, die allerdings nur als zweidimensionale Projektionen am Himmel vorlagen, da die Information zur Entfernung fehlte: der Abell-Katalog mit etwa 3000 Galaxienhaufen und der Katalog von Zwicky mit ca. 30000 Galaxien und 9000

[2]Da es sich um einen eigenständigen Begriff handelt, wird er in der gesamten Arbeit groß geschrieben.



Abell 426 (Perseus Cluster)



Numerische Simulation (Kravtsov et al.)

Abbildung 1: Der Galaxienhaufen Abell 426 (Digitized Sky Survey 1993-1995) im Vergleich zu einem Galaxienhaufen in einer numerischen Simulation (Kravtsov et al. 1997).

Galaxiengruppen. Die ersten Rotverschiebungskataloge, die dann einen dreidimensionalen Einblick in das Universum ermöglichten, wurden Anfang der 80er Jahre zugänglich: der Harvard-Smithsonian Center-for-Astrophysics-Survey (CfA-Survey, Davis et al. 1982) und der Southern-Sky-Redshift-Survey (SSRS, da Costa et al. 1988), der eine Erweiterung des CfA-Surveys auf die südliche Hemisphäre darstellt. Heutzutage liegen eine ganze Reihe solcher Rotverschiebungskataloge zur Galaxienverteilung in den unterschiedlichsten Spektralbereichen vor. Im Infraroten bilden die Beobachtungen des IRAS-Satelliten die Grundlage des QDOT (Saunders et al. 1991), des IRAS 1.2 Jy (Fisher et al. 1995) und des PSCz Surveys (Saunders et al. 1995). Die Galaxien-Durchmusterungen wie z.B. der Stromlo APM-Katalog mit 1787 gemessenen Rotverschiebungen (Loveday et al. 1992), der Las-Campanas-Redshift-Survey (LCRS, Shectman et al. 1996), bei dem 26418 Galaxien spektroskopiert wurden, oder dem ESO-Slice-Project (ESP, Vettolani 1998), bei dem 3342 Galaxien vermessen wurden, bzw. die Rotverschiebungskataloge von Galaxienhaufen wie der ESO-Nearby-Abell-Cluster-Survey (ENACS, Katgert et al. 1996), der aus 107 Clustern mit insgesamt 5634 Galaxien aufgebaut ist, basieren auf optischen Beobachtungen. Aber auch zu röntgenselektierten Galaxienhaufen,die in erster Linie auf den Daten des ROSAT-Satelliten beruhen, liegen Messungen zur Rotverschiebung vor (z.B. der X-ray-brightest Abell-type Clusters of Galaxies Katalog (XBAC, Ebeling et al. 1996), der Rosat-Deep-Cluster-Survey (RDCS, Rosati et al. 1998) oder der Serendipitous High-Redshift Archival ROSAT Cluster-Survey (SHARC, Collins et al. 1997)). Aus all diesen Beobachtungen konnten zum einen Informationen zur Verteilung der Galaxien und Galaxienhaufen gewonnen werden, zum anderen aber auch Ergebnisse zu Strukturen und physikalischen Eigenschaften der Objekte selbst. Der Durchmesser einer solchen Ansammlung von Galaxien beträgt im Mittel 1 bis 3 Megaparsec bei einer Masse von bis zu $10^{15} M_{\odot}$.

Ein wichtiger Prozeß bei der Entwicklung von Galaxien und Galaxienhaufen ist die Verschmelzung mit anderen Objekten. Wie weiter unten erwähnt, geht man davon aus, daß sich die Strukturen von anfänglichen kleinen Objekten durch Merger[3]-Ereignisse hin zu massereichen Systemen entwickeln. Beobachtungen bestätigen, daß solche Verschmelzungsprozesse für die Entstehung der leuchtkraftstarken Infrarot-Galaxien verantwortlich sind. Ebenso können Merger bei der Entstehung der massereichen cD-Galaxien in den Zentren von Galaxienhaufen von Bedeutung sein. Die Ergebnisse numerischer Simulationen, die in Abschnitt 5.2.2 ausführlich vorgestellt werden, bestätigen diese Daten und zeigen, daß solche Ereignisse bevorzugt in Gebieten sehr hoher Dichte stattfinden. Ebenso findet man bei der Untersuchung dieser Objekte ein erhöhtes Maß an Unterstrukturen, was ebenfalls ein Indikator für starke Wechselwirkung ist (Abschnitt 5.3).

Der Anschaulichkeit halber wird in Abb.1 ein beobachteter Galaxienhaufen (Abell 426 (Perseus-Cluster[4]), Digitized Sky Survey 1993-1995) einem Haufen aus einer numerischen Simulation gegenübergestellt. Es handelt sich bei dem Perseus-Galaxienhaufen um einen Ausschnitt der Kantenlänge 0.5 h^{-1}Mpc, wobei neben den Galaxien des Haufens auch eine ganze Zahl von Vordergrundsternen zu erkennen sind. Der simulierte Haufen mit einer Masse von ca. $10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ bei dem lediglich die zugehörigen Teilchen gezeigt

[3]engl. *to merge* verschmelzen
[4]engl. *to cluster* anhäufen

sind, ist das Ergebnis einer Rechnung des Adaptive-Refinement-Tree-Codes (ART, Kravtsov et al. 1997), der in Kapitel 4 noch ausführlich vorgestellt wird. Man entnimmt dieser Abbildung die Notwendigkeit hoher räumlicher Auflösung bei Simulationen, ohne die die ausgeprägten inneren Strukturen dieser beiden Galaxienhaufen nicht vergleichbar wären. In Kapitel 4 werden deshalb numerische Effekte und deren Einfluß auf die Ergebnisse ausführlich diskutiert.

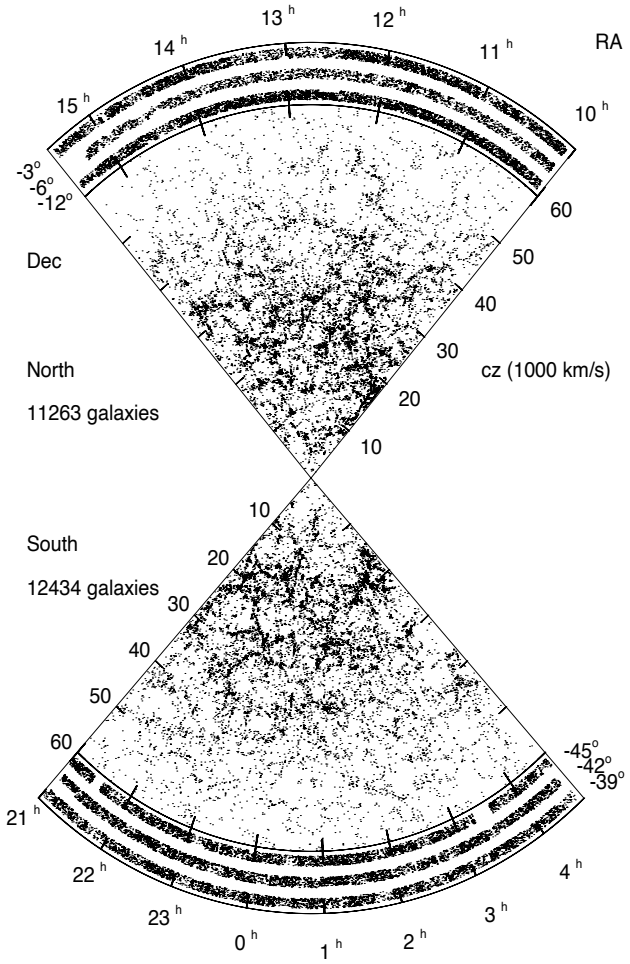


Abbildung 2: Der Las Campanas Rotverschiebungskatalog (Shectman et al. 1996).

Großräumige Strukturen

Ein anderes Problem besteht in der Erforschung von Strukturen in der Tiefe des kosmischen Raumes bei Rotverschiebungen bis zu $z \simeq 3$. Erste Ansätze dazu liefern die sogenannten Pencil-Beam-Surveys (Broadhurst et al. 1990) mit überraschenden Hinweisen auf sehr große Strukturen sowie die einzelnen Beobachtungen von (Super-)Haufenstrukturen bei Rotverschiebungen bis zu $z \simeq 3$ (Connolly et al. 1996, Steidel et al. 1998), die aus neuartige Techniken zur Galaxienidentifikation in diesen großen Entfernungen herrühren (Pettini et al. 1998). An Hand dreidimensionaler Galaxienkarten fand man ebenfalls, daß die Verteilung jenseits der Skala der Galaxienhaufen (einige Megaparsec) *nicht* sofort in eine homogene und isotrope Verteilung übergeht. Vielmehr beobachtet man eine netzartige Struktur, die geprägt ist von Filamenten, Wänden und riesigen Leerräumen (z.B. Einasto et al. 1980, Oort 1983). Zum anschaulichen Verständnis ist dazu in Abb.2 ein Schnitt durch den Las-Campanas-Redshift-Survey (Shectman et al. 1996) abgebildet. Die mittlere Tiefe dieses Rotverschiebungskatalogs beträgt in etwa $z \simeq 0.1$ bei einer Gesamtzahl ca. 25.000 Galaxien (s.o.). Jeder Punkt in diesem Bild entspricht einer Einzelgalaxie, und man kann deutlich die Verklumpungseigenschaften bzw. die großräumigen Strukturen in der Materieverteilung erkennen. Da numerische Simulationen nicht in der Lage sind, exakt dieselben Objekte an exakt denselben Orten zu reproduzieren, ist man bei der Analyse solcher Kataloge auf statistische Hilfsmittel wie z.B. das Leistungsspektrum bzw. Powerspektrum[5] (vgl. Anhang A.5) angewiesen. Erst die Anwendung solcher Verfahren auf die Verteilung der Galaxien bzw. Galaxienhaufen ermöglicht einen Vergleich mit sog. Mock-Katalogen[6], die aus Simulationen gewonnen wurden (vgl. Abb.8, S.35).

Jede kosmologische Theorie muß nun erklären, wie sich diese Strukturvielfalt aus einem anfänglich doch gleichförmigen Anfangszustand entwickelt hat. Zeitgleich zu den neuen Beobachtungen kamen auch Theorien zur Strukturbildung auf, die sich in erster Linie in zwei Kategorien einteilen lassen: Modelle mit kalter Dunkle Materie (**C**old-**D**ark-**M**atter, CDM) und heißer Dunkle Materie (**H**ot-**D**ark-**M**atter, HDM). Im CDM-Szenario entstehen zuerst kleine Objekte, die dann im Laufe der Zeit durch das Verschmelzen mit anderen immer mehr an Masse gewinnen. Beim HDM-Modell verhält es sich genau andersherum; hier fragmentieren die anfänglich großen Objekte zu Galaxien. Einer der Hauptnachteile der HDM-Theorie besteht darin, daß die Galaxien sich erst sehr spät bilden, was im Widerspruch zu Beobachtungen von Galaxien bei einer Rotverschiebung bis zu $z \simeq 5$ (ca. 1 Mrd. Jahre nach dem Urknall) steht. Heutzutage liegen zahlreiche Rotverschiebungskataloge vor (s.o.), mit deren Hilfe sich Theorien zur Strukturbildung verifizieren und eventuell modifizieren lassen. Ziel dieser Arbeit ist es, einige dieser Modelle mit Hilfe numerischer Simulationen durchzurechnen und die Ergebnisse mit beobachteten Galaxienverteilungen zu vergleichen.

[5] engl. *power* Leistung
[6] engl. *mock* Nachahmung

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach einer kurzen Einführung in die Grundbegriffe der Kosmologie in Kapitel 2 wird in Kapitel 3 der verwendete AP^{3}M-Simulationscode ausführlich vorgestellt. Die Ergebnisse der Arbeit sind dann auf die darauf folgenden Kapitel 4, 5 und 6 verteilt, in denen zum einen numerische Effekte in Simulationen und deren Auswirkungen auf die Ergebnisse, und zum anderen physikalische Eigenschaften von Galaxienhaufen und der Einfluß von Leerräumen im Universum auf das Verhältnis der räumlichen Verteilung von leuchtender zu Dunkler Materie untersucht werden. Zum Abschluß werden die Ergebnisse in einer Zusammenfassung (Kapitel 7) rekapituliert und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen der Simulationen und Auswertungsverfahren vorgestellt. Daran schließt sich ein Anhang an, in dem einige Herleitungen und Zusammenhänge skizziert werden, die bei der Auswertung der Simulationen von Bedeutung sind, sowie die Erweiterung des ursprünglichen AP^{3}M-Codes im Detail erläutert werden, durch die es erst möglich wurde, andere Modelle als ein CDM-Modell im flachen Universum zu simulieren. Die Inhalte der einzelnen Kapitel sollen dabei an dieser Stelle kurz vorgestellt werden.

Auflösungseffekte in numerischen Simulationen

Wie schon eingangs erwähnt, sind numerische Simulationen eines der wichtigsten Hilfsmittel von Kosmologen, die sich mit der Entstehung und Entwicklung von Galaxien und Galaxienhaufen innerhalb der großräumigen Struktur des Universums befassen. Allerdings handelt es sich hierbei lediglich um die Approximation der stoßfreien Boltzmann-Gleichung durch ein Teilchenbild, was natürlich eine Reihe von Nachteilen und Gefahren in sich birgt. Prinzipiell wird das Universum als von einer idealen Flüssigkeit erfüllt betrachtet (vgl. Abschnitt 2.2), deren Zeitentwicklung durch die stoßfreie Boltzmann-Gleichung beschrieben wird. Wenn man das Verhalten einer Flüssigkeit durch die Verwendung diskreter (und sehr schwerer) Massenelemente approximiert, die lediglich der gegenseitigen Gravitation unterliegen, kann es bei der Simulation zu numerischen Effekten kommen, die z.B. zu unerwünschten Überschneidungen von Trajektoren in unterdichten Gebieten führen. Solch ein Ereignis widerspricht komplett dem Flüssigkeitsbild und führt darüberhinaus zu einer Verletzung des Energiesatzes (vgl. Abb.12, S.51). In Kapitel 4 wird ein Standard CDM-Modell unter Verwendung von drei N-Body-Codes[7] (PM und AP^{3}M(Couchman 1991), ART (Kravtsov et al. 1997)) mit identischen Startverteilungen gerechnet und die Ergebnisse zum einen direkt an Hand der Teilchenpositionen, und zum anderen mittels physikalischer Eigenschaften von Galaxienhaufen in diesen Rechnungen miteinander verglichen. Dabei wird u.a. auch darauf hingewiesen, daß eine gute räumliche Auflösung zwingend notwendig ist, um realistische Ergebnisse zu erhalten, es aber bei der Verwendung von Codes, die eine direkte Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung bei der Integration der Bewegungsgleichungen berücksichtigen, ebenso auf eine Abstimmung von räumlicher Auflösung und Integrationsschrittweite ankommt. Die Ergebnisse dieses Kapitels finden sich in der Arbeit *Effects of Force Resolution in Cosmological N-Body Codes* (Alexander Knebe, Andrey Kravtsov, Stefan Gottlöber und Anatoly Klypin, eingereicht

[7] engl. *N-Body* Vielteilchen

bei MNRAS).

Galaxienhaufen in Simulationen

Galaxienhaufen sind die größten gravitativ gebundenen Objekte im Universum. Im Modell der kalten Dunklen Materie entstehen solche Strukturen durch die gravitativ bedingte Verstärkung anfänglich kleiner Fluktuationen im Dichtefeld. Auf der Skala von Galaxienhaufen bzw. Super-Haufen sind Maxima im primordialen Dichtefeld selten, und diese Systeme kollabieren im hierarchischen Modell (CDM, s.o.) erst relativ spät; man kann davon ausgehen, daß sie sich derzeit immer noch in der Bildungsphase befinden. Aus diesem Grund sind sie bestens geeignet, um mit ihrer Hilfe Informationen über den Prozeß der Strukturbildung im Universum zu erhalten. Da der genaue Zeitpunkt der Ausbildung solcher Objekte ebenfalls stark vom kosmologischen Modell abhängt, ist man z.B. in der Lage, durch Untersuchungen zu Unterstrukturen Aussagen über den Dichteparameter Ω_0 zu machen: In einem Universum mit einem kleinen Ω_0 entstehen Galaxienhaufen früher und haben somit mehr Zeit zu relaxieren, was sich in dem Auftreten von weniger Unterstrukturen widerspiegelt. Die Häufigkeit dieser Galaxiensysteme ist zudem ein gutes Maß für die Amplitude des Powerspektrums der anfänglichen Dichteschwankungen. Heutzutage ist es durch sehr leistungsfähige Rechner und ausgefeilte Simulationsverfahren möglich, die Ausbildung von Galaxienhaufen innerhalb der großräumigen Struktur des Universums zu modellieren, ohne dabei auf eine angemessene Massenauflösung der Objekte selbst verzichten zu müssen. In Kapitel 5 wird nun zum einen der Entstehungs- und Virialisierungsprozeß von Teilchengruppen, die mit Galaxiengruppen bzw. -haufen identifiziert werden können, im Detail untersucht; dabei stehen die Fragen nach der Form und Gestalt der Verschmelzungsprodukte, die Geschwindigkeit der Virialisierung und die ausgeprägte räumliche Korrelation der Merger in Vordergrund. Zum anderen wird eine Methode zur Quantifizierung von Unterstrukten vorgestellt, auf numerische Simulationen angewandt und die Ergebnisse mit aktuellen Beobachtungsdaten verglichen. Dabei wird die Kalibration dieses Verfahrens und der Vergleich mit anderen (Unter-)Strukturindikatoren genauso detailliert überprüft wie eine eventuelle Modellabhängigkeit der Strukturen selbst. Die Ergebnisse dieses Kapitels finden sich in folgenden Arbeiten: *Formation of Groups and Clusters of Galaxies* (Alexander Knebe und Volker Müller, A&A **341**, 1 (1999)) und *Quantifying Substructure in Groups and Clusters of Galaxies* (Alexander Knebe und Volker Müller, eingereicht bei A&A).

Leerräume im Universum

Bei der systematischen Durchmusterung des Himmels in Form von Rotverschiebungskatalogen hat sich gezeigt, daß die Verteilung der Materie von teilweise sehr großen Leerräumen durchbrochen wird, die einen Durchmesser von bis zu 100 h^{-1}Mpc erreichen (z.B. Oort 1983, J.Einasto et al. 1997, M.Einasto et al. 1997, vgl. auch Abb.2 und Abb.8). In Kapitel 4 wird eine neue Möglichkeit aufgezeigt, wie der Bruchteil von (Dunkler) Materie in diesen Voids[8] dazu verwendet werden kann, das Powerspektrum der Galaxienverteilung

[8] engl. *void* Leere

zu einem Powerspektrum der gesamten Materieverteilung zu reduzieren. Dieses Verhältnis ist eines der ungelösten Rätsel der Kosmologie, da sich die Dunkle Materie gemäß ihrer Natur der direkten Beobachtung entzieht und lediglich mit Hilfe dynamischer Aspekte erfaßt werden kann. In den dieser Arbeit zugrunde liegenden numerischen Simulationen hingegen wurde nur Dunkle Materie behandelt, so daß hier direkt der Bruchteil der Materie in den unterdichten Regionen bestimmt werden kann. Unter der Annahme, daß die Verteilung der Void-Materie homogen ist, so wie es durch Simulationen bestätigt werden kann (vgl. Abb.46, S.114), und zusätzlich der Voraussetzung eines skalenunabhängigen Biasing läßt sich dann dieses Ergebnis mit dem Powerspektrum der beobachteten Galaxienverteilung verknüpfen. Die Ergebnisse dieses Kapitels finden sich in der Arbeit: *Steps toward the power spectrum of matter. II. The biasing correction with σ_8 normalization* (Jaan Einasto, Maret Einasto, Erik Tago, Volker Müller, Alexander Knebe, Renue Cen, Alexei A. Starobinsky und Fernando Atrio-Barandela, erscheint bei ApJ)

Kapitel 2

Grundlagen der Kosmologie

Der Ausgangspunkt der modernen Kosmologie ist das 'Kosmologische Prinzip'. Es besagt, daß das Universum in jeder Richtung (Isotropie) und an jedem Ort (Homogenität) gleich beschaffen ist, wenn man nur genügend große Skalen betrachtet und von Unregelmäßigkeiten lokaler Natur absieht; es existiert im Universum keine Vorzugsrichtung oder kein ausgezeichneter Ort. Diese Annahmen ließen sich am besten mit Hilfe von großen Galaxienkatalogen überprüfen, wie sie derzeit allerdings noch nicht vorliegen. Allerdings erhält man auch eine Bestätigung, wenn die kosmische Hintergrundstrahlung in Betracht gezogen wird, da man in jeder beliebigen Himmelsrichtung immer dieselbe Temperatur von ca. 2.73 Kelvin mißt. Erst bei einer Genauigkeit von einigen tausendstel Prozent werden Schwankungen sichtbar (abgesehen von der Dipolanisotropie, die durch die Bewegung der Erde im Sonnensystem, sowie die Bewegung des Sonnensystems und auch der Galaxis selbst verursacht wird). Denkt man an dieser Stelle noch einen Schritt weiter, so gelangt man zum 'Vollkommenen Kosmologischen Prinzip': Das Universum ist nicht nur in jeder Richtung und an jedem Ort gleich, es war und bleibt auch zu jedem Zeitpunkt gleich. Dieses Prinzip steht allerdings im Widerspruch zur beobachteten Expansion des Universums, deren Entdeckung zu recht als die kosmologische Revolution des 20. Jahrhunderts bezeichnet werden kann. Die Annahme eines statischen Modells des Universums bewegte Einstein dazu, in seine Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie die Kosmologische Konstante Λ einzuführen. Allerdings wird nur durch eine ganz spezielle Wahl dieses Parameters ein statisches Universum erzielt (vgl. Gl.(2.18)). Auch wenn dieser Schritt von ihm selbst später abgelehnt wurde, wird dieser zusätzliche Parameter heutzutage doch in realistischen Weltmodellen berücksichtigt. Theorien zur Strukturbildung lassen sich, mit Großrechnern simuliert, gut in Übereinstimmung mit den Beobachtungen bringen, wenn dieser Term ebenfalls in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt wird. Legt man, egal ob nun mit oder ohne Kosmologische Konstante, das Prinzip der Isotropie und Homogenität des Universums der Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen zu Grunde, so gelangt man, wie im diesem Kapitel verdeutlicht wird, automatisch zu einem expandierenden Universum. Weiterhin sollen in diesem Kapitel die dieser Arbeit zu Grunde liegenden Prinzipien, Notationen und der verwendete Sprachgebrauch vorgestellt werden.

2.1 Allgemeine Relativität

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit innerhalb eines jeden Inertialsystems verlangt bei einem Wechsel des Bezugssystems, nicht nur die Orts-, sondern auch die Zeitkoordinate zu transformieren. Der Begriff einer absoluten Zeit, so wie ihn uns die Klassische Physik vermittelt, ist aufzugeben. Es ist jedoch möglich, eine neue absolute Größe zu definieren: das Weltlinienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \; . \tag{2.1}$$

Diese Größe bleibt bei einer Lorentz-Transformation erhalten und wird als der Abstand zwischen zwei Ereignissen im Raum-Zeit-Diagramm bezeichnet.

Einstein's Bemühungen gingen in die Richtung, die gravitative Wechselwirkung nicht mehr als eine Kraft zu beschreiben, sondern als eine Eigenschaft der Raum-Zeit selbst. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, Gl.(2.1) in die allgemeinere Form

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{2.2}$$

zu bringen. Dabei wurde ein vierdimensionaler Raum-Zeit-Vektor eingeführt:

$$dx^i = (c\ dt, dx, dy, dz) \; . \tag{2.3}$$

Einstein suchte nach einem speziellen Zusammenhang zwischen der Metrik der Raum-Zeit g_{ik} und dem Materieinhalt der Raum-Zeit, charakterisiert durch den Energie-Impuls-Tensor T_{ik}, zu finden. Der von ihm gefundene Zusammenhang lautet:

$$G_{ik} - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \; . \tag{2.4}$$

Der Einstein-Tensor

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \tag{2.5}$$

hängt dabei lediglich von der Geometrie ab und läßt sich vollständig auf den metrischen Tensor g_{ik} und dessen Ableitungen zurückführen. Der Energie-Impuls-Tensor T_{ik} hingegen beschreibt die Verteilung der Materie. Im folgenden sollen die Lösungen von Gl.(2.4) unter der Annahme des Kosmologischen Prinzips angegeben werden.

2.2 Friedmann-Modelle

Will man nun mit Hilfe der Einsteinschen Feldgleichungen Gl.(2.4) das Universum beschreiben, so benötigt man einen Ausdruck für die Metrik der Raum-Zeit. Da die Geometrie des Universums das Kosmologische Prinzip erfüllen soll, ist die Gestalt der Metrik festgelegt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - k\ r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) \right) , \tag{2.6}$$

welche den Namen Robertson-Walker-Metrik trägt. Die Zeitabhängigkeit der Geometrie ist hierbei ausschließlich durch den Expansionsfaktor $a(t)$ gegeben. Die Konstante k ist ein Maß für die Krümmung des Raumes und kann auf die Werte 0 bzw. ± 1 skaliert werden:

$$\begin{array}{rcll} k & = & 0 & \text{euklidscher Raum} \\ k & = & -1 & \text{elliptischer (geschlossener) Raum} \\ k & = & +1 & \text{hyperbolischer (offener) Raum .} \end{array}$$

Zusätzlich ist durch die Annahme von Homogenität und Isotropie der Materieverteilung auch die Gestalt des Energie-Impuls-Tensors bestimmt

$$T_{ik} = (p + \rho c^2) u_i u_k - p g_{ik} , \tag{2.7}$$

wobei u_i der Vierer-Vektor der Geschwindigkeit ist. Diese Form für T_{ik} leitet sich dabei aus der einfachen Überlegung ab, daß die Erfüllung des Kosmologischen Prinzips, d.h. die Verwendung der Robertson-Walker-Metrik, die Diagonalität des Energie-Impuls-Tensors fordert. Außerdem verlangt es, daß die Komponenten T_{11}, T_{22} und T_{33} identisch sind, da die Isotropie die Gleichheit der drei räumlichen Komponenten des Einstein-Tensors garantiert. Diese Forderungen werden alle von dem Energie-Impuls-Tensor nach Gl.(2.7) erfüllt, der eine perfekte Flüssigkeit beschreibt. Die Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ ist dabei noch unbestimmt und muß zur exakten Lösung der Feldgleichungen ebenfalls spezifiziert werden.

Verwendet man Gl.(2.6) und Gl.(2.7) zusammen mit den Einsteinschen Feldgleichungen (2.4), so gelangt man zu den Friedmann-Gleichungen:

$$\begin{array}{rclcl} \dot{a}^2 + kc^2 & = & \dfrac{\Lambda c^2}{3} a^2 & + & \dfrac{8\pi G}{3} \rho a^2 \\ \ddot{a} & = & \dfrac{\Lambda c^2}{3} a & - & \dfrac{4\pi G}{3} \left(\rho + \dfrac{3p}{c^2} \right) a. \end{array} \tag{2.8}$$

Diese Gleichungen beschreiben in Abhängigkeit vom kosmologischen Modell (Materieinhalt ρ, kosmologische Konstante Λ, Zustandsgleichung $\rho(p)$) die Expansion $a(t)$ des Universums. Eine geschlossene Lösung dieser Gleichungen ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Für ein materiedominiertes Universum ohne kosmologische Konstante ($p = 0$, $\Lambda = 0$) sind sie im Anhang A.1 angegeben.

2.3 Dichteparameter

Die Gestalt der beiden Friedmann-Gleichungen (Gl.(2.8)) legt die Einführung einer kritischen Dichte ρ_{crit} nahe:

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 . \tag{2.9}$$

Es hat sich durchgesetzt, den Wert der Dichte ρ in Einheiten der kritischen Dichte ρ_{crit} anzugeben:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} . \tag{2.10}$$

Da der kosmologischen Konstanten ebenfalls formal eine Dichte

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \tag{2.11}$$

zugeschrieben werden kann, wird auch ihr Wert als in Einheiten der kritischen Dichte gemessen

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\Lambda c^2}{3}\left(\frac{a}{\dot{a}}\right)^2 , \tag{2.12}$$

wofür abgekürzt auch einfach λ geschrieben wird.

Verwendet man diese beiden Definitionen zusammen mit der ersten Friedmann-Gleichung, so vereinfacht sie sich zu

$$(\Omega_\Lambda + \Omega) = 1 + \frac{kc^2}{a^2} , \tag{2.13}$$

woran man auch sofort die Bedeutung der kritischen Dichte ρ_{crit} ablesen kann: Für eine Gesamtdichte ρ_{total} $(= \rho_\Lambda + \rho)$ im Universum, die genau dem Wert von ρ_{crit} entspricht, hat man es mit einer rein euklidischen Geometrie $k = 0$ zu tun. Ist die Dichte größer, so erhält man ein geschlossenes Universum und für kleinere Werte ein offenes:

$$\Omega_{\text{total}} \begin{cases} > 1 & \text{geschlossener Raum} \\ = 1 & \text{flacher Raum} \\ < 1 & \text{offener Raum} . \end{cases} \tag{2.14}$$

Beobachtungen der Rotationskurven von Spiralgalaxien gaben nun den ersten Hinweis darauf, daß wir einen Großteil der Materie im Universum nicht sehen können; es handelt sich um Dunkle Materie, die sich lediglich durch die gravitative Wechselwirkung, der alle Teilchen unterliegen, bemerkbar macht. Bei allen Untersuchungen von Galaxien, Galaxienhaufen und Superhaufen zeigt sich eine deutliche Dominanz der Dunklen Materie gegenüber der leuchtenden Materie. Eine der zentralen Fragen der Kosmologie ist die Natur dieser Materie. Zum einen kann es sich dabei um z.B. **Ma**ssive **C**ompact **H**alo **O**bjects (MACHO's) handeln, die aus 'normaler' baryonischer Materie aufgebaut sind, zum anderen existieren aber auch Theorien, daß es sich bei dieser Materie um nicht-baryonische Teilchen wie z.B. Axionen, Gravitonen oder aber massebehaftete Neutrinos handelt. Auf diesen Theorien basiert das Bild der Kalten-Dunkeln-Materie (**C**old-**D**ark-**M**atter,

CDM), welches die Grundlage der numerischen Simulationen bildet, die in den nachfolgenden Kapiteln vorgestellt und untersucht werden. Die Materiedichte Ω_m des Universums setzt sich somit aus leuchtender baryonischer Materie $\Omega_{\mathrm{L},b}$ und aus Dunkler Materie Ω_{DM} (baryonischer und/oder nichtbaryonischer Natur) zusammen:

$$\Omega_m = \Omega_{\mathrm{DM},nb} + \Omega_{\mathrm{DM},b} + \Omega_{\mathrm{L},b} \; . \tag{2.15}$$

Der Gesamtanteil baryonischer Materie $\Omega_b = \Omega_{\mathrm{DM},b} + \Omega_{\mathrm{L},b}$ läßt sich mit Hilfe der 'Big Bang Nucleosynthesis' zu $\Omega_b h^2 \simeq 0.01$–0.02 (Walker et al. 1991) bestimmen, und dynamische Messungen und Massenbestimmungen von Galaxienhaufen liefern für den Dichteparameter Ω_m insgesamt $\Omega_m \simeq 0.1$–0.5 (z.B. Eke et al. 1998).

Allerdings tragen auch die kosmische Hintergrundstrahlung und die kosmologische Konstante (vgl. Gl.(2.11)) zur Gesamtdichte des Universums bei, so daß sie sich wie folgt schreiben läßt:

$$\Omega_{\mathrm{total}} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \; . \tag{2.16}$$

Der Wert für den Beitrag der Hintergrundstrahlung, sowie der von masselosen Neutrinos liegt dabei in der Größenordnung $\Omega_r h^2 = \sigma T_r^4 h^2/(c^2 \rho_{\mathrm{crit}}) \simeq 10^{-5}$ ($\sigma c/4$ entspricht der Stefan-Boltzmann Konstanten) bzw. $\Omega_\nu h^2 \simeq 10^{-5}$. Schreibt man den Neutrinos allerdings eine Ruhemasse zu, so wie es neueste Ergebnisse von Super-Kamiokande nahe legen, kann der Anteil Ω_ν an der Gesamtdichte erheblich größer sein:

$$\Omega_\nu h^2 \simeq 0.1 N_\nu \frac{<m_\nu>}{10 \text{ eV}} \; . \tag{2.17}$$

Die Größe N_ν ist die Anzahl von Neutrino-Familien und $< m_\nu >$ deren mittlere Masse, die nach Super-Kamiokande ungefähr in der Größenordnung von 5eV liegen könnte (Primack & Gross 1998). Sie würden in diesem Fall die Dichte des Universums dominieren. Allerdings zeigen Simulationen der Strukturbildung mit sehr massereichen Neutrinos (Hot-Dark-Matter, HDM), daß solche Modelle zu wenig Strukturen auf kleinen Skalen bilden.

2.4 Hubble-Gesetz

Die Verwendung der Robertson-Walker-Metrik hat die Einstein-Gleichungen auf ein System von nicht-linearen Differentialgleichungen für den Expansionsfaktor a transformiert. Lediglich eine ganz spezielle Wahl für den Wert der kosmologischen Konstanten

$$\Lambda = \frac{4\pi G \rho}{c^2} \tag{2.18}$$

erlaubt ein statisches Universum. Typischerweise hat man es jedoch mit einer Expansion bzw. Kontraktion zu tun. So wurde dann auch 1929 von E. Hubble das Auseinanderdriften der Galaxien an Hand von Radialgeschwindigkeitsmessungen gefunden, wobei die Drift-Geschwindigkeit um so größer ist, je weiter die Galaxie von uns entfernt ist. Unter

Verwendung des in den Friedmann-Gleichungen auftauchenden Expansionsfaktors a und mit einigen sehr einfachen Überlegungen läßt sich dieser Zusammenhang qualitativ wie folgt nachvollziehen:

Da sich der Abstand d zu einem Punkte im Laufe der Zeit durch die Expansion des Universums vergrößert (die Raumkoordinaten skalieren mit a), gilt zu einer beliebigen Zeit t:

$$\frac{d(t)}{a(t)} = \frac{d(t_0)}{a(t_0)} \,. \tag{2.19}$$

Der Punkt scheint sich radial von uns mit einer Geschwindigkeit

$$v_{\mathrm{rad}} = \dot{d} = \dot{a}\,\frac{d_0}{a_0} = \frac{\dot{a}}{a}\,d \tag{2.20}$$

zu entfernen. Die Größe $\dot{a}/a$ definiert man nun als Hubble-Parameter

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \,, \tag{2.21}$$

und man erhält das von Hubble gefundene Gesetz

$$v_{\mathrm{rad}} = H\;d \,. \tag{2.22}$$

Diese Rechnung gilt selbstverständlich nur für Bereiche, in denen man eine Krümmung der Raum-Zeit vernachlässigen kann.

2.5 Rotverschiebung

Es ist hilfreich, eine neue, mit dem Expansionsfaktor a verknüpfte, Variable einzuführen, die sich eng an Beobachtungen anlehnt. Diese Größe bezeichnet man als Rotverschiebung z, da sie über die Rotverschiebung von astronomischen Objekten definiert ist:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \,. \tag{2.23}$$

Hierbei ist λ_0 die Wellenlänge, die von uns als Beobachter gemessen wird und λ_e die Wellenlänge, mit der das Licht ursprünglich emittiert wurde. Da sich die Quelle in der Regel auf Grund der Expansion des Universums von uns entfernt, kann man die Wellenlängenänderung auch wie folgt schreiben:

$$\frac{a_e}{\lambda_e} = \frac{a_0}{\lambda_0} \,. \tag{2.24}$$

Die beiden Beziehungen (2.23) und (2.24) ergeben in Kombination:

$$1 + z = \frac{a}{a_0} \,. \tag{2.25}$$

Da der Blick zu sehr weit entfernten Objekten mit hohen Rotverschiebungen ebenso ein Blick zurück in der Zeit ist, verwendet man diese Variable auch öfter zur 'Zeitangabe'. Gerade in numerischen Simulationen spricht man z.B. davon, daß die Rechnung bei einer Rotverschiebung von z.B. $z = 25$ gestartet wurde. Damit ist dann eine Zeit gemeint, zu der das Universum um einen Faktor 26 kleiner war als heute.

Im Anhang A finden sich nun ergänzend zu den hier vorgestellten Grundlagen der Kosmologie einige Erweiterungen und ausführlichere Ableitungen.

Kapitel 3

Kosmologische Vielteilchen-Simulationen

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Kosmologie ist die Verwendung von numerischen Vielteilchensimulationen. Sie haben im Laufe der Zeit zu einem verbesserten Verständnis der Strukturbildung, Entstehung und Entwicklung von Galaxien und Galaxienhaufen, Quasarabsorptionslinien und anderen Phänomenen im Universum beigetragen. Mit numerischen Simulationen, die im Laufe der 70er Jahre den Einzug in die Kosmologie fanden (Peebles 1970, Press & Schechter 1974, Haggerty & Janin 1974, White 1976), versucht man die Lücke zwischen Theorien primordialer Dichtefluktuationen (vgl. Einleitung) und den Beobachtungen großräumiger Struktur und den Eigenschaften von Galaxien, Galaxiengruppen und Haufen von Galaxien zu füllen. Die Grundidee dabei ist die Reduktion auf ein Anfangswertproblem, bei dem lediglich die Startbedingungen vorgegeben werden und dann die Entwicklung im Laufe der Zeit auf Grund bekannter physikalischer Gesetze simuliert wird. Die ersten Codes verwendeten zur Integration der Newtonschen Bewegungsgleichungen die direkte Summation der Teilchen-Teilchen-Wechselwirkungen (Aarseth 1963) und waren damals auf 300–700 Teilchen beschränkt. Erst die Entwicklung von Tree- bzw. Gitter-Methoden in den 80er Jahren (z.B. Efstathiou et al. 1985, Barnes & Hut 1986, Hockney & Eastwood 1988), sowie die rasante Entwicklung der Computertechnik ermöglichte die Verwendung einer größeren Anzahl von Teilchen. Mit Hilfe von sehr leistungsfähigen Computern und ausgefeilten, zum Teil parallelisierten Integrationsmethoden heutzutage (z.B. Couchman 1991, Suisalu & Saar 1995a, Pearce & Couchman 1997, Kravtsov et al. 1997) ist man in der Lage, verschiedene Modelle der Strukturbildung im Universum durchzurechnen und mit entsprechenden Beobachtungen zu vergleichen. Auf diese Art und Weise hat man die Möglichkeit, unterschiedliche Theorien vom Ursprung und der Natur der primordialen Störungen in der Materieverteilung und der nachfolgenden nichtlinearen Entwicklung und Ausbildung von Strukturen zu studieren. Da man auf Grund von Beobachtungen sicher sein kann, daß die Materie, welche das gesamte Universum erfüllt, in erster Linie aus dunkler, nicht-baryonischer Materie besteht, die sich lediglich durch gravitative Wechselwirkung bemerkbar macht, ist es einem möglich, die Simulation eines rein durch die Gravitation bestimmten Vielteilchensystems mit dem wirklichen Universum zu vergleichen.

Tabelle 1: Parameter der kosmologischen Modelle. Die mitbewegte Kantenlänge der Simulationsbox L ist in $h^{-1}\mathrm{Mpc}$ angegeben und H_0 hat die Einheit $\mathrm{km\ s^{-1}Mpc^{-1}}$. Die Teilchenmasse m_p hat die Einheit $10^{11}\ h^{-1}M_\odot$.

Simulation	**SCDM**	**ΛCDM**	**OCDM1**	**OCDM2**
Ω_0	1.0	0.3	0.3	0.5
$\Omega_{\Lambda,0}$	0.0	0.7	0.0	0.0
Ω_b	0.05	0.0255	0.0255	0.0255
H_0	50.0	70.0	70.0	70.0
σ_8	1.18	1.00	0.48	0.96
L	200	280	280	280
m_p	11.0	8.7	8.7	15.0
Softening	$50\ h^{-1}\mathrm{kpc}$			

3.1 Parameter der Simulationen

Um ein bestimmtes kosmologisches Modell zu simulieren, müssen vorab eine Vielzahl von verschiedenen Parametern festgelegt werden. Diese Parameter bestimmen u.a. das Modell selbst, aber auch die Art und Weise, in der dieses Modell dann simuliert wird. Man unterscheidet dabei zwischen den physikalischen Modellparametern und den rein technischen Parametern, die für die Güte und die Geschwindigkeit der Simulation verantwortlich sind. Im folgenden werden die unterschiedlichen kosmologischen Modelle vorgestellt, welche die Grundlage für die nachfolgende Analyse und Auswertung in den Kapiteln 5 und 6 darstellen. Anschließend werden die technischen Parameter (Massenauflösung, Ortsauflösung und Integrationsschrittweite) im Detail erläutert, deren Einfluß auf die Qualität der Simulation in Kapitel 4 ausführlich untersucht wird.

Modellparameter

Bei den Modellparametern läßt sich ebenfalls wieder eine Unterteilung durchführen. Einerseits hat man Parameter, die in erster Linie in die Anfangsverteilung der Teilchen und Geschwindigkeiten eingehen, andererseits Parameter, die das kosmologische Hintergrundmodell bestimmen und bei der Integration der Bewegungsgleichungen Berücksichtigung finden.

Die Startwerte für die Teilchen und Geschwindigkeiten sind im Falle Gaußscher Fluktuationen im primordialen Dichtefeld, so wie es in etwa von der Inflationstheorie vorhergesagt wird (Guth 1981), durch das Powerspektrum bestimmt (Bardeen et al. 1986). Allerdings sind Inflationstheorien (und auch andere Verfahren zur Erzeugung primordialer Fluktuationen) nicht in der Lage, eine genaue Vorhersage für die Amplitude der Schwankungen zu machen, da die Parameter (z.B. Inflatonmasse) bis jetzt noch nicht gemessen werden konnten. Sie erlauben somit lediglich die Berechnung der Gestalt des Powerspektrums unter Berücksichtigung des kosmologischen Hintergrundmodells. Die Stärke der Dichteschwankungen wird dabei mit Hilfe der Normierung des Spektrums festgelegt, die auf zwei unterschiedliche Art und Weisen erfolgen kann:

- COBE-Normierung:

  Die Vermessung der Anisotropie in der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung läßt sich mit den Fluktuationen im primordialen Gravitationspotential (und somit Schwankungen in der Materieverteilung) in Verbindung bringen. Es handelt sich dabei um Inhomogenitäten auf Skalen, die heutzutage in der Größenordnung von 3000 h^{-1}Mpc liegen.

- σ_8-Normierung:

  Bei dieser Methode berechnet man die Varianz der Fluktuationen von beobachteten Galaxienhaufen in Sphären mit einem Radius $R = 8\ h^{-1}$Mpc und benutzt diesen Wert (unter Verwendung der linearen Theorie) zur Normierung des Powerspektrums.

Die Normierung des Powerspektrums wird in jedem Fall über den Wert für σ_8 angegeben, der sich auch bei einer COBE-Normierung auf elementarem Wege aus dem Powerspektrum bestimmen läßt (vgl. Anhang A.5, Gl.(A.30)). Der Vorteil der COBE-Normierung besteht darin, daß sich die Daten auf eine Epoche beziehen, für die sich die Fluktuationen in der Materieverteilung mit Hilfe linearer Näherungen der physikalischen Theorien erfassen lassen (Efstathiou et al. 1992). Die σ_8-Normierung hingegen hat einen direkten Bezug zu der heutzutage beobachteten Häufigkeit von Galaxienhaufen. Von der Seite der Beobachtungen her läßt sich jedoch σ_8 nur in Zusammenhang mit Ω_0 bestimmen (White et al. 1993, Viana & Liddle 1996, Eke et al. 1996b, Bahcall et al. 1997, Eke et al. 1998):

$$\sigma_8 \Omega_0^\alpha \simeq 0.52 \text{ mit } \alpha \simeq 0.5\ . \tag{3.1}$$

Der Exponent α von Ω_0 hängt dabei zusätzlich von der Wahl der Parameter für Ω_0 und $\Omega_{\Lambda,0}$ ab. Erst Untersuchungen zur Entwicklung der Häufigkeit von Galaxienhaufen heben, wie später gezeigt wird, die Entartung zwischen den Werten σ_8 und Ω_0 auf (Eke et al. 1996b, Bahcall et al. 1997, Eke et al. 1998).

Die Powerspektren der simulierten kosmologischen Modelle wurden mit Hilfe der vierjährigen Messung der Schwankungen in der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den COBE-Satelliten (Bennett et al. 1996) normiert. Die Form des Spektrums selbst wird dabei durch Modellparameter wie z.B. Ω_0, $\Omega_{\Lambda,0}$, Ω_b und H_0 festgelegt und mit Hilfe des Programm-Pakets CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga 1996) für die kosmologischen Modelle nach Tabelle 1 berechnet. In Abb.3 sind die entsprechenden Spektren abgebildet, wobei sie nach linearer Theorie zum Zeitpunkt $z = 0.0$ extrapoliert wurden. Diese Spektren dienten als Eingabe für die Berechnung der Startrealisation der numerischen Simulationen, auf deren Erzeugung in Abschnitt 3.2 näher eingegangen wird.

Insgesamt wurden vier verschiedene kosmologische Modelle simuliert. Es war das Ziel, die Simulationen im Hinblick auf die Entstehung und Entwicklung von Galaxienhaufen innerhalb der großräumigen Struktur des Universums zu untersuchen. Dies verlangt eine hinreichend große Simulationsbox bei gleichzeitig hoher räumliche Auflösung, da die internen Eigenschaften von Galaxienhaufen einen direkten Bezug zur großräumigen Struktur

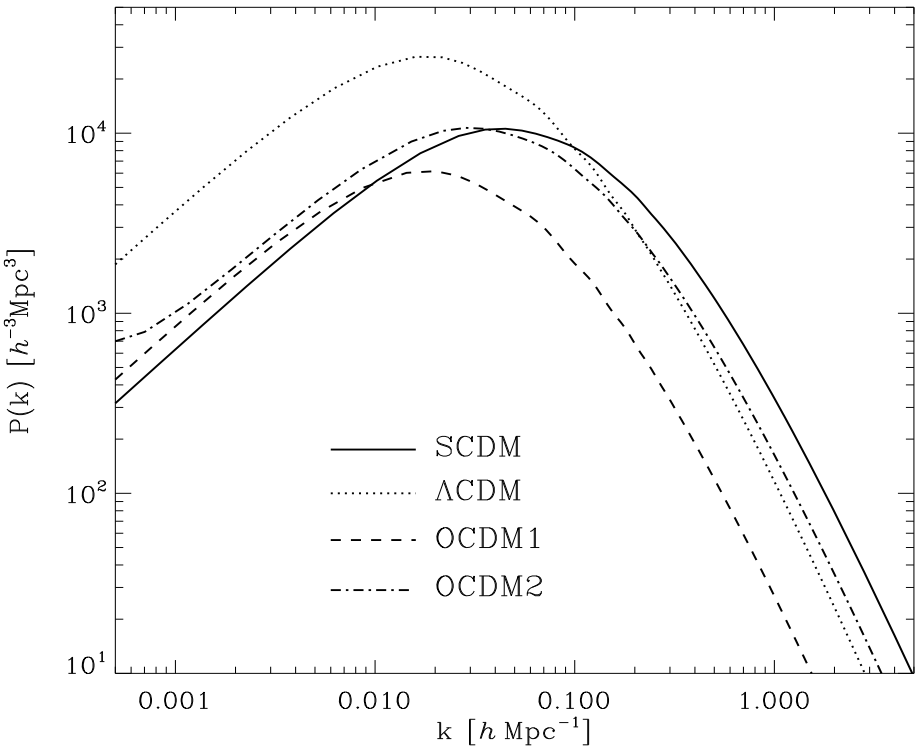


Abbildung 3: Powerspektren der simulierten kosmologischen Modelle.

des Universums aufweisen (Colberg et al. 1997). Die Boxgröße wurde dabei so gewählt, daß auch den größten beobachtbaren Strukturen Rechnung getragen wird: Man findet im Powerspektrum der Dichtefluktuationen ein Maximum bei einer Längenskala von in etwa 120 h^{-1}Mpc (Einasto et al. 1997). Die Simulationsboxen wurden einheitlich auf 400 Mpc Kantenlänge festgelegt (z.B. 280 h^{-1}Mpc = 400 Mpc für $h = 0.7$). Der Baryonengehalt der Modelle orientiert sich an der Vorhersage der 'Big Bang Nucleosynthesis' $\Omega_b h^2 = 0.0125$ (Walker et al. 1991, Copi et al. 1995), und die Werte für den Hubble-Parameter H_0 sind an Beobachtungswerte für das Alter des Universum angelehnt, die u.a. aus dem Alter von Kugelsternhaufen und dem Zusammenhang zwischen t_0 und H_0 aus dem Anhang A gewonnen wurden (Chaboyer et al. 1998, Krauss 1998). Die Parameter der analysierten Simulationen sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Das SCDM-Modell, welches bei Verwendung der COBE-Normierung zu viele Galaxienhaufen und bei einer σ_8-Normierung zu wenig Leistung auf großen Skalen vorhersagt (Efstathiou et al. 1992, Davis et al. 1992), dient als Referenz-Modell, da es während der 80er Jahre das Standard-Modell der Strukturbildung war (s. Übersichtsartikel von Ostriker 1993) und als Ausgangspunkt für neue Modelle bzw. Abwandlungen diente.

Die anderen drei Modelle stimmen in der Wahl des Dichteparameters $\Omega_0 = 0.3$–0.5 eher mit aktuellen Beobachtungswerten überein (Eke et al. 1998, Perlmutter et al. 1998). Allerdings weist das OCDM1-Modell zu wenig Leistung auf kleinen Skalen auf, was zu einer zu geringen Anzahl für Galaxienhaufen führt (vgl. Abb.25, S.74). Die beiden übrigen

Modelle (ΛCDM und OCDM2) hingegen liefern jedoch realistische Ergebnisse, was u.a. die Häufigkeit von Galaxienhaufen (Eke et al. 1996b) angeht, und sie sind ebenso in der Lage, die beobachtete großräumige Verteilung von Galaxien-Superhaufen widerzuspiegeln (Doroshkevich et al. 1998).

Massenauflösung

Prinzipiell geht man davon aus, daß das Universum als eine perfekte Flüssigkeit angesehen werden kann (vgl. Abschnitt 2.2), deren Entwicklung durch die stoßfreie Boltzmann-Gleichung beschrieben wird. Allerdings wird dies in einer numerischen Simulation durch ein Teilchenbild approximiert; man geht davon aus, daß sich das Universum aus diskreten Massenpunkten zusammensetzt, deren Trajektoren unter dem reinen Einfluß der Gravitation verfolgt werden können. Ein einzelnes Teilchen steht dabei repräsentativ für eine gewisse Anzahl Dunkler Materie-Teilchen, Sterne oder aber Galaxien. Welcher Masse solch ein Einzel-Teilchen genau entspricht, hängt in erster Linie von der Größe der Simulationsbox, charakterisiert durch die Kantenlänge L, und natürlich von der Anzahl der verwendeten Teilchen selbst ab. Die Masse eines Einzelteilchens berechnet sich wie folgt:

$$m_{\mathrm{part}} = \Omega_0 \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{L^3}{N} \,. \tag{3.2}$$

Die Abhängigkeit vom Hubble-Parameter H_0 in Gl.(3.2) entsteht durch die Definition der kritischen Dichte $\rho_{\mathrm{crit}} = 3H_0^2/(8\pi G)$.

Man erkennt an Gl.(3.2), daß eine Vergrößerung der Box zwangsläufig eine Verschlechterung der Massenauflösung nach sich zieht: die Masse eines Einzelteilchens vergrößert sich. Auf der einen Seite möchte man großskalige Fluktuationen untersuchen, andererseits aber gleichzeitig die sich ausbildenden Teilchengruppen mit Galaxien bzw. Galaxienhaufen identifizieren können. Je geringer die Massenauflösung ist, desto weniger Teilchen erhält man pro Galaxienhaufen, was einen erheblichen Einfluß auf die zu untersuchenden Eigenschaften wie z.B. Unterstrukturen u.ä. hat. Die Gesamtzahl der Teilchen ist durch die uns zur Verfügung stehende Rechnerkapazität beschränkt und beträgt maximal $N = 128^3$ ($\simeq 2{\cdot}10^6$) Teilchen. Die Boxgröße L in Tabelle 1 ist nun so gewählt worden, daß ein einzelnes Teilchen in etwa der Masse einer Galaxie mit $M_{\mathrm{gal}} \simeq 10^{12} h^{-1} M_\odot$ entspricht.

Räumliche Auflösung

Der nächste, sehr wichtige Parameter ist die räumliche Auflösung der Simulation. Sie hängt in entscheidender Form von der Art und Weise der Simulation bzw. vom verwendeten N-Body-Code ab. In später folgenden Abschnitten werden unterschiedliche Methoden zur Berechnung der Kraft zwischen den einzelnen Teilchen im Detail vorgestellt, und an dieser Stelle soll nur kurz die mit diesen Verfahren verbundene räumliche Auflösung skizziert werden.

Mit räumlicher Auflösung meint man den kleinsten Abstand, für den die Kraft zwischen zwei Masseteilchen noch korrekt wiedergegeben bzw. berechnet werden kann. Die einfachste Methode, um die gegenseitige Wechselwirkung zweier Massenpunkte zu bestimmen, ist die Integration der Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$\forall i: \; m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(r) = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \; . \tag{3.3}$$

Die Summation hat hierbei über alle vorhanden Teilchen zu erfolgen, um den Einfluß des gesamten Universums auf das Teilchen i zu erfassen. Man sieht der Gleichung aber auch an, daß es für sehr eng benachbarte Teilchen $r_j \simeq r_i$ zu Problemen kommt, da dann der Summand singulär wird. Aus diesem Grund ist man gezwungen, die Kraft ab einem bestimmten Grenzwert künstlich abzuschneiden. Dieses Prozeß bezeichnet man als 'Softening'; die Kraft wird zu kleinen Abständen hin 'aufgeweicht'. Der genaue Mechanismus des Softening im verwendeten AP^{3}M-Code wird ausführlich in Abschnitt 3.3.2 erläutert.

Da allerdings die Summation für jedes einzelne Teilchen über alle anderen Teilchen zu erfolgen hat, handelt es sich um ein sehr zeitaufwendiges Verfahren zur Kraftbestimmung und ist selbst heutzutage bei der Verwendung von Großrechnern nicht realisierbar. Für z.B. $N = 10^7$ Teilchen beträgt die Zeit zur Durchführung eines einzigen Integrationsschritts mit der direkten Summation einige Stunden auf einem 100-GFlop-Rechner (1GFlop = 10^9 Gleitkomma-Operationen pro Sekunde), wohingegen ausgereiftere Verfahren nur wenige Sekunden dafür benötigen (Bertschinger 1998). Man war (und ist) also gezwungen, neue Methoden zu entwickeln, um dieses Problem in den Griff zu bekommen. An dieser Stelle soll ein möglicher Ausweg skizziert werden, welcher ebenfalls in Abschnitt 3.3.3 im Detail erklärt wird.

Geht man z.B. bei der Berechnung der Kraft den 'Umweg' über die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(r) = 4\pi G \rho(r) \; , \tag{3.4}$$

so läßt sich die Bestimmung des Potentials $\Phi(r)$ wie folgt erzielen: Man berechnet die von allen Teilchen erzeugte Dichteverteilung $\rho(r)$ und erhält das Potential durch eine Faltung mit einer dem Problem angepaßten Greenschen Funktion $\mathrm{G}(r)$:

$$\Phi(r) = \int \rho(r') \mathrm{G}(r - r') dr' \; . \tag{3.5}$$

Dieses Verfahren läßt sich beschleunigen, wenn man die Rechnungen nicht im Ortsraum, sondern im reziproken Fourier-Raum durchführt: Die Dichte $\rho(r)$ wird mittels einer **F**ast-**F**ourier-**T**ransformation (FFT) in den k-Raum transformiert und dort dann mit $\hat{\mathrm{G}}(k)$ multipliziert:

$$\hat{\Phi}(k) = \hat{\rho}(k) \cdot \hat{\mathrm{G}}(k) \; . \tag{3.6}$$

Danach transformiert man $\hat{\Phi}(k)$ zurück in den Ortsraum. Das so gewonnene Potential wird zur Berechnung der Kraft herangezogen:

$$\vec{F}(r) = -\nabla\Phi(r)\,. \tag{3.7}$$

Diese Methode kann durch eine Diskretisierung der Dichte $\rho(r)$ auf einem Gitter sehr gut numerisch realisiert werden. Außerdem impliziert sie automatisch *periodische Randbedingungen*, die bei der Simulation kosmologischer Modelle unbedingt notwendig sind. Man ist allerdings auf eine räumliche Auflösung von wenigstens einer Gitterzelle beschränkt. Alle Wechselwirkungen zwischen Teilchen innerhalb einer Zelle werden der Natur des Verfahrens entsprechend 'verschmiert'.

Egal für welche Methode man sich entscheidet, man ist jedesmal auf eine untere Grenze für die Auflösung der gegenseitigen Wechselwirkung der Teilchen angewiesen bzw. eingeschränkt.

Integrationsschritte

Die Güte der Simulation mißt sich ebenfalls an der Größe der Schrittweite bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen. Die hier vorgestellten Modelle wurden alle in 500 Schritten von der Rotverschiebung $z = 25$ bis zum heutigen Zeitpunkt $z = 0$ integriert. Üblicherweise wird zwar der Expansionsfaktor a als Integrationsvariable verwendet, aber der AP^{3}M-Code von H. Couchman bedient sich aus Flexibilitätsgründen der Größe (vgl. Anhang B):

$$p = a^{\alpha} \text{ mit } \alpha = 1.5\,. \tag{3.8}$$

Die Wahl $\alpha = 1.5$ garantiert nun, daß die Abstände aufeinanderfolgender Integrationsschritte $\Delta p = \text{const.}$, umgerechnet auf physikalische Abstände in der Rotverschiebung Δz, immer kleiner werden, je weiter die Simulation entwickelt ist. Die führt zu einer verbesserten Zeitauflösung der Simulation in den physikalisch relevanten Phasen der Strukturbildung.

3.2 Erzeugung einer Startverteilung

Bevor die numerische Simulation eines kosmologischen Modells gestartet werden kann, ist es notwendig, eine anfängliche Verteilung der Teilchen (mit entsprechenden Geschwindigkeiten) zu erzeugen, welche das Powerspektrum der Dichtefluktuationen zum Startzeitpunkt hinreichend gut widerspiegelt. Der Ursprung der Schwankungen im Dichtefeld kann dabei durch den Mechanismus der Inflation (Guth 1981) erklärt werden (vgl. Einleitung), wobei andere Theorien wie z.B. topologische Defekte (Vilken & Shellard 1994) in dieser Arbeit nicht in Betracht gezogen werden sollen, da sie nach neuesten Erkenntnissen nicht die Temperaturfluktuationen der kosmischen Hintergrundstrahlung und die großräumigen Strukturen erklären können (Pen et al. 1997).

Das Problem der Startrealisation teilt sich dabei in die Aufgaben:

- Konstruktion einer homogenen und isotropen Verteilung
- Überlagerung von Dichtefluktuationen ,

die beide im folgenden erklärt werden sollen.

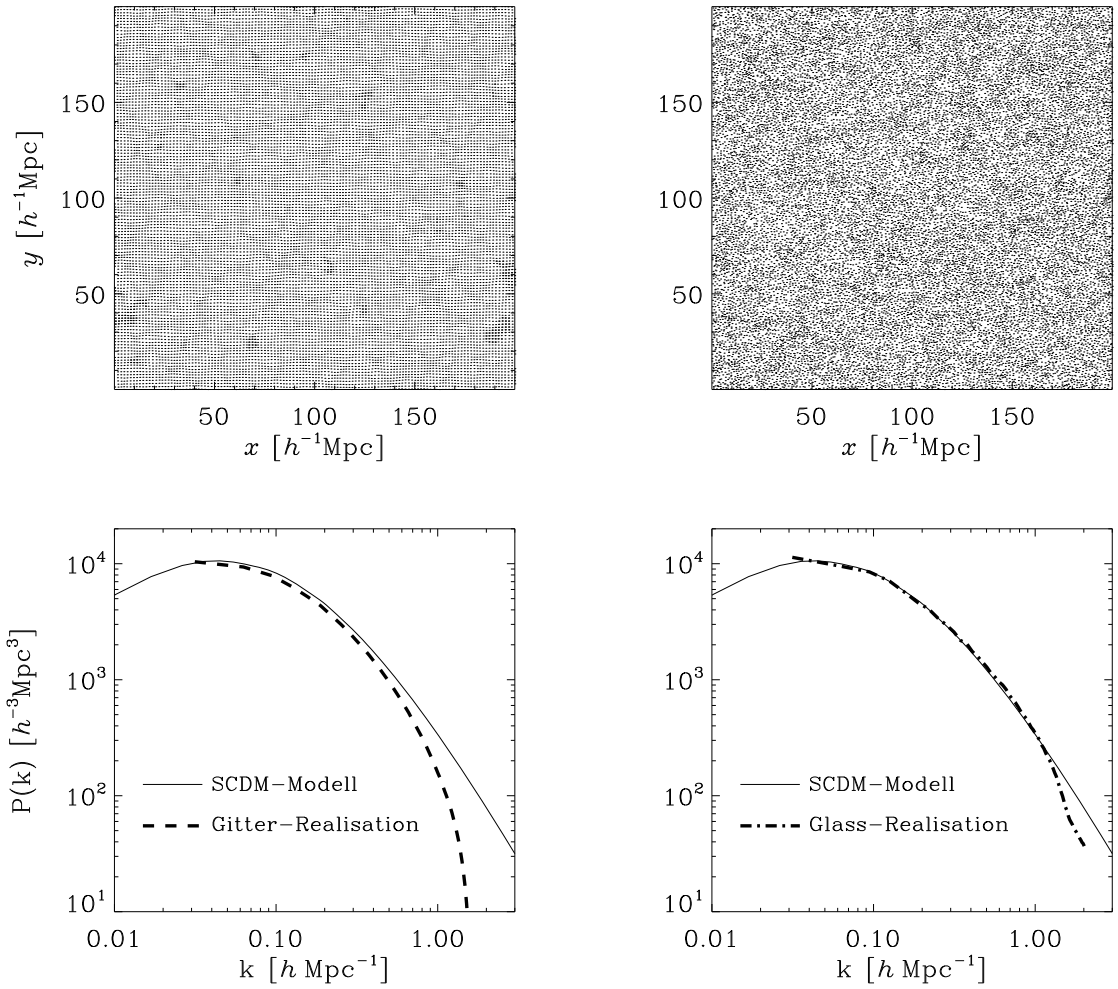


Abbildung 4: Realisation der Powerspektren durch die anfängliche Verteilung der Teilchen im SCDM Modell. Die Dicke des Schnitts durch die Simulationsbox beträgt jeweils 2 h^{-1}Mpc.

Homogene und isotrope Verteilung

Eine gleichförmige Verteilung einer vorgegebenen Anzahl von Teilchen läßt sich auf zwei verschiedene Art und Weisen erzeugen. Man kann die Teilchen gleichförmig auf ein Git-

ter setzen, oder aber man verwendet eine weiterentwickelte Methode (White 1996), die nicht nur ästhetische, sondern auch physikalische Vorteile mit sich bringt. Dazu werden die Teilchen zufällig in die Simulation hineingeworfen und dann mit dem N-Body-Code vorwärts entwickelt; allerdings nicht unter dem normalen Gravitationsgesetz, sondern mit einer negativen Gravitationskonstanten. Dies hat zur Folge, daß sich die Teilchen abstoßen anstatt anziehen. Nach einer gewissen Anzahl von Integrationsschritten (die Simulationsbox wurde innerhalb von 500 Integrationsschritten um den Faktor 26 expandiert) entsteht eine sog. Glas-Verteilung, die annähernd frei von jeglichen Strukturen ist und als Ausgangsbasis für die folgende Überlagerung von Dichtefluktuationen gemäß dem (Eingangs-)Powerspektrum dienen kann.

Überlagerung von Dichtefluktuationen (Zel'dovich-Approximation)

Nachdem eine gleichförmige Verteilung von Startpositionen vorliegt, müssen die Teilchen dem kosmologischen Modell entsprechend verrückt werden. Das Modell wird dabei durch ein zuvor berechnetes Powerspektrum der Dichtefluktuationen charakterisiert (vgl. Abschnitt 3.1 und Abb.3). Die Zel'dovich-Approximation (Zel'dovich 1970) stellt nun eine einfache Methode dar, einer vorliegenden Teilchenverteilung die Fluktuationen, die durch das Powerspektrum beschrieben werden, aufzuerlegen (Doroshkevich et al. 1980, Dekel 1982, Efstathiou et al. 1985). Die Approximation vermittelt einen Zusammenhang zwischen der anfänglichen Lagrange-Koordinate $\vec{q}$ und der Eulerschen mitbewegten Koordinate $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{q} + D(t)\vec{s}(\vec{q}) \\ \vec{v} &= a\frac{dD(t)}{dt}\vec{s}(\vec{q}) \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hierbei beschreibt $D(t)$ das Wachstum der Fluktuationen nach linearer Theorie, und $\vec{s}(\vec{q})$ ist das 'Verrückungsfeld', welches sich über eine Poisson-Gleichung bestimmen läßt:

$$\vec{s} = \nabla\Phi_q \text{ mit } \Delta\Phi_q = -\frac{\delta}{D}. \tag{3.10}$$

In Abb.4 kann man erkennen, daß das Powerspektrum der Teilchen, rekonstruiert von den Glas-Startdaten, annähernd dem Eingangs-Spektrum entspricht. Das Abknicken beider Realisationen zu kleinen Skalen hin (also großen Wellenzahlen k) erklärt sich dadurch, daß das Spektrum in diesem Bereich mittels eines e-Faktors abgeschnitten wird:

$$P(k) = P_{\text{input}}(k) \cdot e^{-(k/k_{\text{cut}})^{16}} \ . \tag{3.11}$$

Die Grenz-Wellenzahl k_{cut} beträgt in den Startrealisationen der Simulationen $k_{\text{cut}} = 0.76 \cdot k_{\text{ny}}$, wobei k_{ny} die Nyquist-Frequenz ist (Couchman, Dokumentation aus dem Internet). Auf diese Art und Weise werden die kleinskaligen Fluktuationen unterdrückt, die zu einem (verfrühten) Überschneiden der Teilchentrajektorien führen.

3.3 Integration der Bewegungsgleichungen

3.3.1 Mitbewegte Koordinaten

Die Gleichungen, welche die Trajektoren eines jeden Teilchens in der numerischen Simulation beschreiben, lauten (vgl. Gl.(3.3)):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -\nabla\Phi \\ \Delta\Phi &= 4\pi G\rho(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Da man es in der Kosmologie auf jedem Fall mit einem expandierenden Universum zu tun hat, empfiehlt sich die Einführung eines mitbewegten Koordinatensystem. Hierbei handelt es sich nicht um eine Transformation auf ein Inertialsystem; allerdings berücksichtigt man auf diese Art und Weise die kosmische Expansion direkt in den Bewegungsgleichungen und erhält Lösungen für die Teilchentrajektoren, die nur die gegenseitige Wechselwirkung der Objekte untereinander beschreiben. Man erreicht das durch die folgende Transformation:

$$\vec{r}(t) = a(t)\cdot\vec{x}(t)\ . \tag{3.13}$$

Hierbei ist $\vec{r}(t)$ die physikalische Koordinate und $\vec{x}(t)$ die mitbewegte. Der Expansionsfaktor $a(t)$ beschreibt die Ausdehnung des Universums in Abhängigkeit vom kosmologischen Modell und läßt sich als Lösung der Friedmann-Gleichungen bestimmen (vgl. Kapitel 2).

Die Berechnung der physikalischen Geschwindigkeit und Beschleunigung liefert somit:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= a\dot{\vec{x}} + \dot{a}\vec{x} &&= a(\dot{\vec{x}} + H\vec{x}) \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \quad ... &&= a(\ddot{\vec{x}} + 2H\dot{\vec{x}}) + \ddot{a}\ \vec{x}\ , \end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei die Definition des Hubble-Parameters $H = \dot{a}/a$ verwendet wurde.

Man kann nun klar zwischen der Pekuliarbewegung der Objekte ($\vec{v}_{\rm pec} = a\dot{\vec{x}}$) und dem Hubble-Fluß ($\vec{v}_H = Ha\vec{x} = H\vec{r}$), verursacht durch das Auseinanderdriften des Koordinatensystems, unterscheiden.

Verwendet man Gl.(3.13) unter Berücksichtigung von Gl.(3.14) zusammen mit den Bewegungsgleichungen Gl.(3.12), so erhält man ein neues gekoppeltes System von Differentialgleichungen für die Koordinaten $\vec{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + 2H\frac{d\vec{x}}{dt} &= -\frac{1}{a^3}\nabla_x\Phi_x(\vec{x},t) \\ \Delta_x\Phi_x &= 4\pi G(\rho(\vec{x},t) - \overline{\rho}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die Einführung der mitbewegten Koordinaten hat somit zwei entscheidende Auswirkungen: Zum einen enthalten die Bewegungsgleichungen nun einen Reibungsterm, der pro-

portional zum Hubble-Parameter ist, und zum anderen eine konstante negative Massendichte $-\overline{\rho}$, die dafür sorgt, daß Φ_x das Potential ist, welches lediglich für die Pekuliarbewegungen der Teilchen verantwortlich ist.

Die Lösung dieses gekoppelten Systems von Differentialgleichungen ist das zentrale Problem eines jeden kosmologischen N-Body-Codes, und einige Verfahren zur Bewältigung dieser Aufgabe sollen in den nun folgenden Abschnitten im Detail vorgestellt werden.

Der in dieser Arbeit verwendete AP^{3}M-Code von Couchman (1991) ist in seiner ursprünglichen, allgemein erhältlichen Form (vgl. Couchman, Internet-Hinweis im Literaturverzeichnis) lediglich in der Lage, ein SCDM-Modell zu simulieren, da die Bewegungsgleichungen bei der Umrechnung auf mitbewegte Koordinaten explizit dem Verhalten $a(t) \propto t^{2/3}$ im Einstein-de-Sitter Universum angepaßt wurden (vgl. Anhang A). Die durchgeführten Modifikationen werden im Anhang erläutert.

3.3.2 Direkte Summation (Particle-Particle, PP)

Wie schon im Abschnitt 3.1 erwähnt, ist die einfachste Methode zur Simulation eines Vielteilchensystems die direkte Summation der Teilchen-Teilchen-Wechselwirkungen (vgl. Gl.(3.3)). Die Kraft auf jedes einzelne Teilchen wird dabei wie folgt ermittelt:

$$\forall i: \ \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} + 2H\frac{d\vec{x}_i}{dt} = G\sum_{j\neq i}\frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}. \tag{3.16}$$

Will man mit Hilfe dieser zeitaufwendigen Methode die Bahnen von Teilchen unter der gegenseitigen Wechselwirkung (in mitbewegten Koordinaten) nachsimulieren, so muß man berücksichtigen, daß die Kraft für extrem kleine Abstände gegen unendlich divergiert. In Abschnitt 3.1 wurde ebenfalls auf einen möglichen Ausweg hingewiesen; man modifiziert das Kraftgesetz, so daß die Singularität ausgeschlossen wird. Der in dieser Arbeit verwendete N-Body-Code erzielt das auf die folgende Art und Weise: Jedes Teilchen wird als eine ausgedehnte Ladungswolke aufgefaßt, deren Dichteverlauf einer sog. S_2-Sphäre entspricht (Hockney & Eastwood 1988):

$$S_2 : \rho(r) = \begin{cases} \dfrac{48}{\pi s^4}\left(\dfrac{s}{2} - r\right) & \text{für } \ r < s/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.17}$$

Der Parameter s bestimmt hierbei den Rand der Wolke und charakterisiert die räumliche Auflösung der Simulation. Das modifizierte Kraftgesetz für gegenseitig wechselwirkende S_2-Sphären lautet nun:

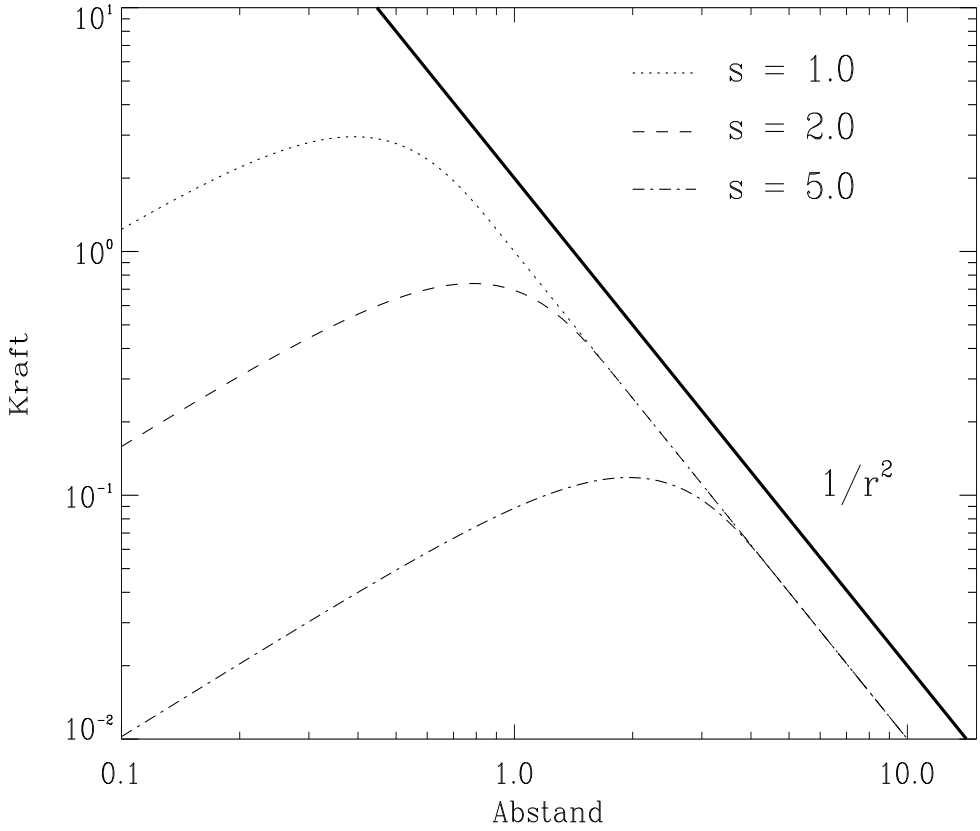


Abbildung 5: Verdeutlichung des modifizierten (erweichten) Kraftgesetzes bei der direkten Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung. Die Einheiten sind willkürlich gewählt.

$$F(r) = \begin{cases} \frac{1}{35s^2}\left(224\xi - 224\xi^3 + 70\xi^4 + 48\xi^5 - 21\xi^6\right) & \text{für } 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{1}{35s^2}\left(\frac{12}{\xi^2} - 224 + 896\xi + 840\xi^2 - 224\xi^3 + 70\xi^4 - 48\xi^5 + 7\xi^6\right) & \text{für } 1 \leq \xi \leq 2 \\ \frac{1}{r^2} & \text{für } 2 \leq \xi \end{cases} \tag{3.18}$$

Dabei wurde die Abkürzung $\xi = 2r/s$ verwendet.

Zur anschaulichen Verdeutlichung dieses 'aufgeweichten' Kraftgesetzes dient Abb.5. Hier wird gezeigt, wie die gegenseitige Wechselwirkung für Abstände kleiner als das Softening s stetig (und differenzierbar) gegen Null strebt. Zum Vergleich ist das normale $1/r^2$-Gesetz mitgezeichnet, allerdings ein wenig nach oben verschoben, um eine bessere

Vergleichsmöglichkeit zu bieten. Die Einheit der Kraft, sowie die Einheit für den Abstand und das Softening sind willkürlich gewählt, da es in der Abbildung lediglich auf das allgemeine Verhalten des Kraftgesetz ankommt.

3.3.3 Gitter-Methode (Particle-Mesh, PM)

Nun soll die am weitesten verbreitete Methode zur Bestimmung der gegenseitigen Wechselwirkung sehr vieler Teilchen vorgestellt werden. Wie schon im Unterabschnitt über die räumliche Auflösung numerischer Simulationen skizziert, basiert dieses Verfahren auf der Lösung der Poisson-Gleichung (in mitbewegten Koordinaten) auf einem Gitter. Die einzelnen Schritte zur Bewältigung dieses Unterfangens gestalten sich wie folgt:

- Zuweisung der Teilchen an ein diskretes Gitter liefert Dichtefeld $\rho_{i,j,k}$
- Lösung der Poisson-Gleichung auf dem Gitter:
  - (a) Fourier-Transformation des Dichtefeldes $\rho_{i,j,k} \xrightarrow{\text{FFT}} \hat{\rho}_{i,j,k}$
  - (b) Multiplikation mit Greenscher Funktion liefert Potential $\hat{\Phi}_{i,j,k}$
  - (c) Fourier-Rücktransformation des Potentials $\hat{\Phi}_{i,j,k} \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} \Phi_{i,j,k}$
- Differentation des Potential liefert Kraft $F_{i,j,k}$ auf dem Gitter
- Rückinterpolation der Kraft zu den Teilchenorten

Bei der Rückinterpolation der Kraft von den Gitterstützstellen zu den Teilchenorten ist darauf zu achten, daß das selbe Schema verwendet wird wie bei der Zuweisung der Teilchen an das Gitter. Andernfalls ist eine Impulserhaltung des Systems nicht gewährleistet (Hockney & Eastwood 1988). Das gebräuchliche Verfahren in dem von Couchman entwickelten AP^{3}M-Code entspricht der sog. **T**riangular-**S**haped-**C**loud (kurz: TSC) Methode. Das Teilchen wird dabei in jeder Raumrichtung an drei (insgesamt also 27) Gitterpunkte zugewiesen, jeweils mit einer dem Abstand zum Gitterpunkt umgekehrt proportionalen Gewichtung.

Auf den ersten Blick mag diese Methode zeitaufwendig erscheinen, aber im Endeffekt ist sie durch die Verwendung von Fast-Fourier-Transformationen erheblich schneller. Der größte Nachteil dieses Verfahrens ist die räumliche Auflösung der Kraft; innerhalb einer Gitterzelle üben die Teilchen keine Kraft aufeinander aus, und erst ab Abständen von wenigstens zwei Gitterzellen kann man sicher sein, das korrekte $1/r^2$-Kraftgesetz zu reproduzieren. Folglich neigt man dazu, feine Gitter zu verwenden, was dann natürlich wieder eine größere Rechnerleistung erfordert und letztendlich auch zu längeren Rechenzeiten führt.

In Abb.6 kann man das durch die Gittermethode hervorgerufene Kraftgesetz wieder mit dem $1/r^2$-Gesetz vergleichen. Zu diesem Zweck wurde ein einzelnes Teilchen an ein Gitter mit 128^3 Stützstellen zugewiesen und das von diesem Teilchen erzeugte Gravitationsfeld mittels der PM-Methode berechnet. Auf Kugelsphären, deren Zentren mit dem Teilchenort zusammenfallen, wurde dann die gegenseitige Wechselwirkung berechnet und über die

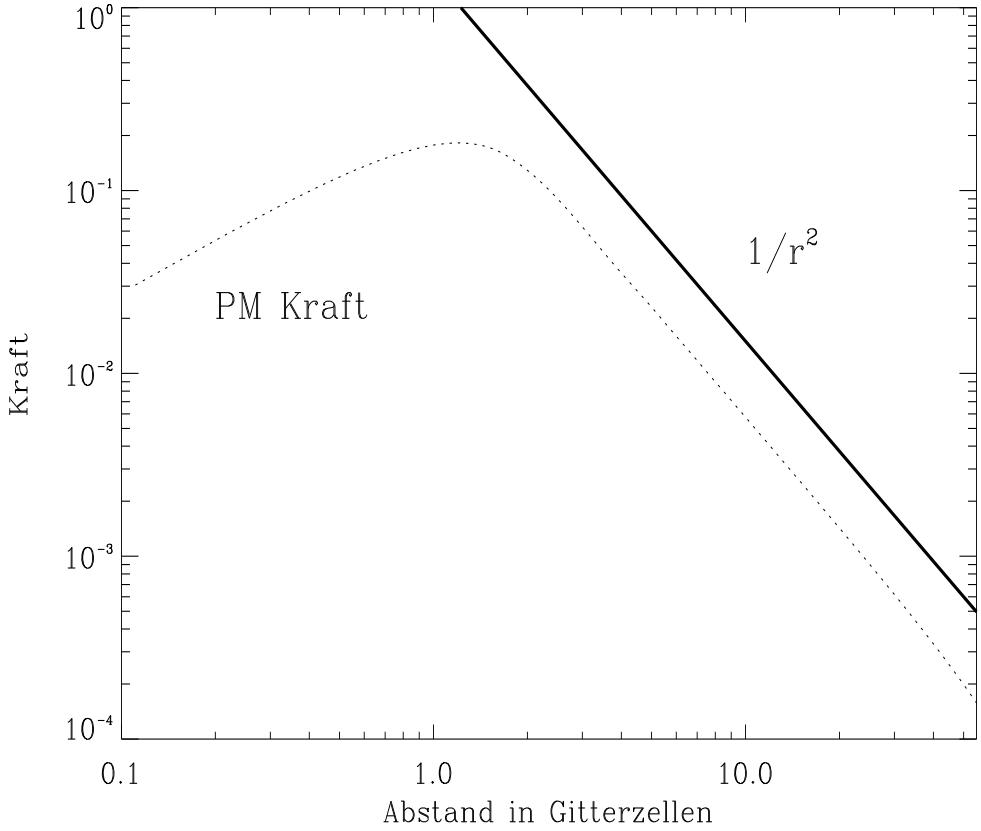


Abbildung 6: Gravitationsfeld einer Punktmasse berechnet mittels Particle-Mesh Verfahren.

gesamte Sphäre gemittelt. Dabei wurde der Radius der Sphäre kontinuierlich vergrößert. Das Ergebnis ist in Abb.6 bis zu Abständen von 50 Gitterstützstellen dargestellt. Für Radien kleiner als ca. 2-3 Gitterzellen wird das Kraftfeld künstlich gegen Null gedrückt, da sich in diesem Bereich die Kraft sowieso nicht mehr auflösen läßt; man erreicht das durch eine optimierte Greenschen Funktion (Efstathiou et al. 1985, Hockney & Eastwood 1988). Außerdem ist dieses 'Aufweichen' der PM-Kraft für kleine Abstände ebenfalls notwendig für eine stetige Anpassung an den PP-Anteil, wie im nachfolgenden Abschnitt verdeutlicht.

3.3.4 Adaptive PP-PM-Kombination (AP^{3}M)

Die letzten beiden Abschnitte haben Möglichkeiten gezeigt, die Bewegung von Teilchen zu beschreiben, die lediglich der gegenseitigen Wechselwirkung unterliegen. Beide Methoden hatten ihre Vor- und Nachteile: die direkte Summation der Teilchen-Teilchen-Kräfte läßt sich nur für eine geringe Anzahl von Teilchen realisieren, liefert aber eine hohe Genauigkeit

der Ergebnisse, wohingegen die Gitter-Methode eine zu geringe Auflösung der Kraft nach sich zieht, dafür aber sehr wenig Rechenzeit im Vergleich zur PP-Methode beansprucht. Es ist nun naheliegend, beide Methode miteinander zu vereinen.

P^{3}M Methode

Den Einfluß weit entfernter Teilchen kann man ohne weitere Probleme und ohne Verlust von Genauigkeit mittels PM-Verfahren berücksichtigen. Die Wechselwirkung dicht benachbarter Teilchen wird hingegen durch die PP-Methode bestimmt. Die einzigen Probleme bei diesem Verfahren sind:

- stetiges Verknüpfen beider Kräfte
- Auffinden der nächsten Nachbarn eines jeden Teilchens.

Der erste Punkt läßt sich relativ einfach über ein Softening s_{rmpm} der PM-Kraft handhaben, welches schon in Abb.6 als Abknicken unterhalb von drei Gitterzellen zu erkennen ist. Unterhalb von s_{rmpm} werden die PM- und PP-Kraft derart zusammengepaßt, daß die Summe beider Kräfte das erforderliche Kraftgesetz liefert. Zur Veranschaulichung dient Abb.7. Die Werte für die Softening-Parameter sind hierbei $s = 0.1$ (in dimensionslosen Gittereinheiten) für das Ausblenden der PP-Kraft am kurzreichweitigen Ende (dieser Wert bestimmt die allgemeine räumliche Auflösung der Kraft) und $s_{\rm pm} = 3$ (ebenfalls in Gittereinheiten) als Punkt, an dem PP- und PM-Kraft zusammengefügt werden. Der PM-Anteil wurde wieder experimentell auf einem Gitter mit 128^3 Stützstellen bestimmt. Die Summe beider Kräfte ist als durchgezogene Linie gezeichnet, und zum Vergleich (ein wenig nach oben verschoben) das $1/r^2$-Gesetz.

Der zweite Punkt betrifft das Auffinden von Nachbarn und läßt sich durch die Einführung einer 'linked-list' erheblich vereinfachen. Das Prinzip dieser Liste besteht darin, Teilchen innerhalb eines neuen, mit dem Softening $s_{\rm pm}$ verknüpften Gitters vorzusortieren. Ist das geschehen, muß nur nach Nachbarteilchen j zum Teilchen i

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \leq r_e \tag{3.19}$$

innerhalb der umliegenden Gitterzellen gesucht werden. Hierbei ist r_e der Grenzradius, der sich aus dem PM-Softening wie folgt berechnet:

$$r_e \simeq 0.75\ s_{\rm pm}. \tag{3.20}$$

Eine detaillierte Beschreibung des Zusammenhangs zwischen r_e und dem Softening $s_{\rm pm}$ findet sich ebenfalls in der Monographie von Hockney & Eastwood (1988).

Die gesamte Simulationsbox wird somit zusätzlich in ein 'chaining-mesh' Gitter

$$L_s = L/r_e \tag{3.21}$$

unterteilt, wobei der Wert für L_s selbstverständlich in jeder Raumrichtung einen ganzzahligen Wert haben muß. Alle Teilchen werden dann vor jedem Integrationsschritt in

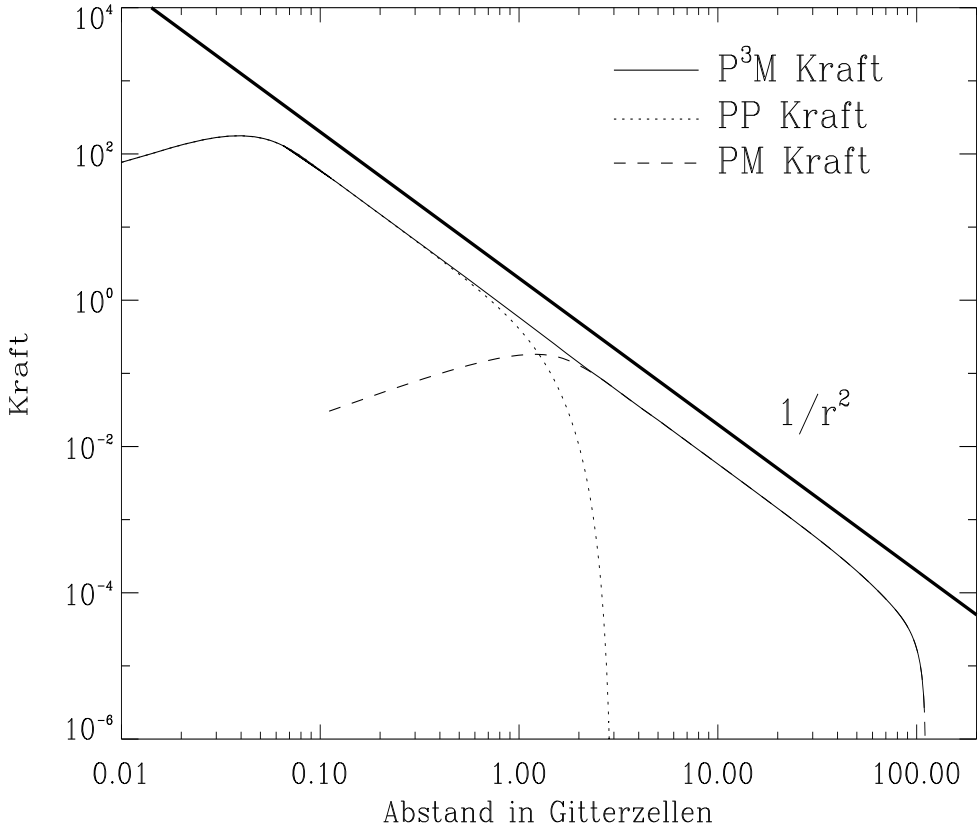


Abbildung 7: Gravitationsfeld einer Punktmasse zusammengesetzt aus einem PP-Anteil für kleine Abstände und einem PM-Anteil für große Abstände. Die Werte der Softening-Parameter betragen $s = 0.1$ und $s_{\mathrm{pm}} = 3$.

diesem Gitter lokalisiert und eine Liste (die oben erwähnte 'linked-list') angefertigt, die ein schnelles Aufrufen aller Teilchen in einer vorgegebenen chaining-mesh Zelle erlaubt. Sucht man also die nächsten Nachbarn j eines Teilchen i, die bei der Berechnung des PP-Anteils der Kraft eine Rolle spielen, ist nur noch ein Absuchen der chaining-mesh-Zelle, in der sich Teilchen i befindet, sowie der unmittelbar angrenzenden chaining-mesh-Zellen notwendig.

Adaptive P^{3}M Methode

Im Laufe einer Simulation fangen die Teilchen auf Grund der attraktiven Wirkung der Gravitation an zu 'verklumpen'; es bilden sich Bereiche aus, in denen die Teilchen sich häufen, sowie Gebiete, aus denen die Teilchen abgezogen werden. Zu späteren Zeiten ballen sich somit die Teilchen in Gebieten, die jeweils nur von wenigen chaining-mesh Zellen abgedeckt werden. Aus diesem Grund fängt der Code an, immer langsamer zu

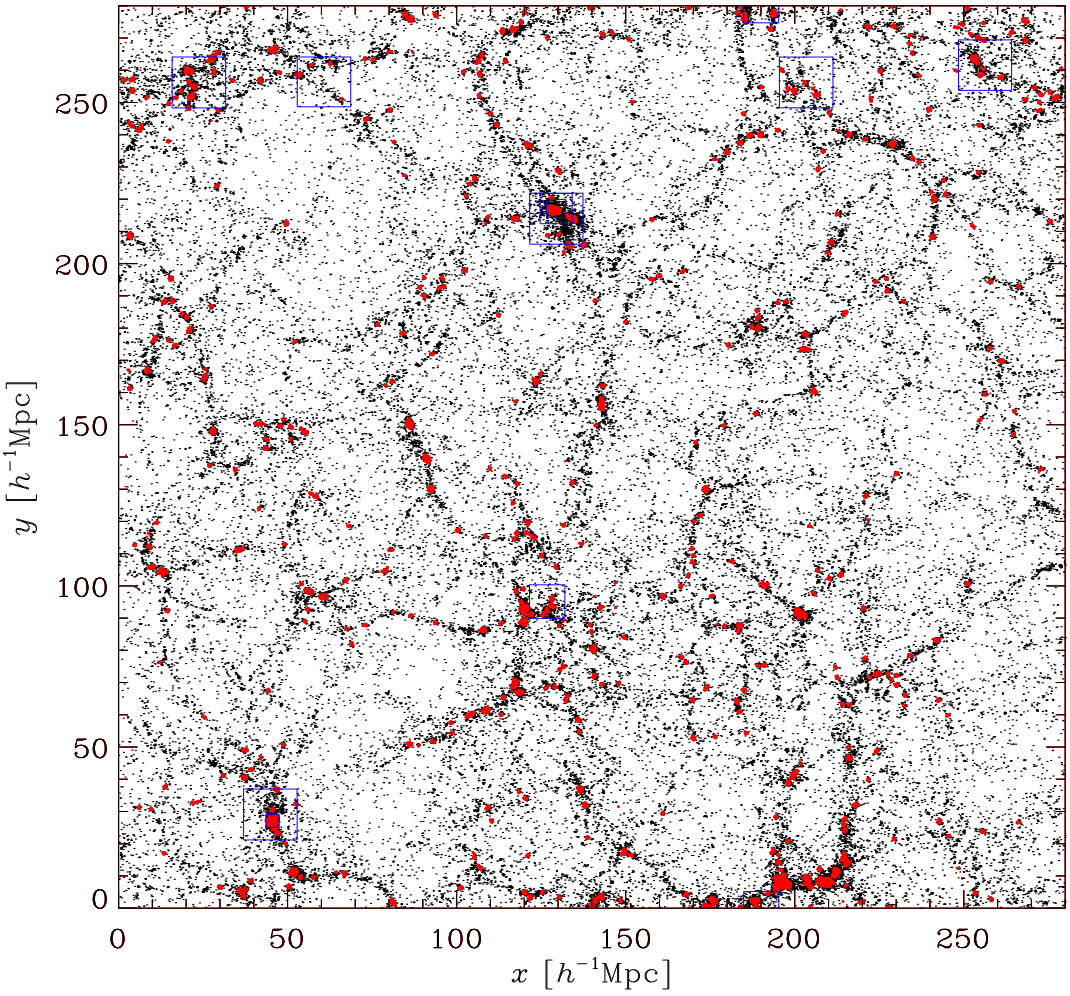


Abbildung 8: Schnitt der Dicke $15h^{-1}$Mpc durch die Simulationsbox im ΛCDM-Modell. Refinements sind blau markiert. Bei den roten Objekten handelt es sich um FOF-Gruppen.

rechnen, da jetzt auf einmal doch wieder die direkte Summation über viele Teilchen zu erfolgen hat. Um genau das zu verhindern, plaziert der AP^{3}M-Code in Gebiete hoher Dichte neue Gitter. Innerhalb des überdichten Bereichs wird ein verfeinertes Gitter (Refinement) verwendet, dessen Stützstellenanzahl durch die (lokale) Dichte in dem Bereich bestimmt ist. Alle Teilchen in diesem verfeinerten Bereich werden von der PP-Summation ausgeschlossen. Der Code berechnet den ursprünglichen PP-Anteil nun mittels eines neuen, eigenständigen P^{3}M-Durchlaufs, der lediglich auf das überdichte Gebiet beschränkt und isolierten Randbedingungen unterworfen ist. Das Kriterium für solch ein Refinement ist durch die Anzahl der Teilchen in einer 'chaining-mesh' Zelle gegeben, welche zu Beginn eines jeden Integrationsschritts (gleich nach dem Erstellen der 'linked-list') überprüft wird. Bei der Simulation der hier vorgestellten kosmologischen Modelle wurde

ein Schwellenwert von 50 Teilchen für das Refinement-Kriterium verwendet.

Das adaptive Verfeinern der Simulationsbox hat keinen Einfluß auf die räumliche Auflösung oder gar die Massenauflösung der Simulation; es handelt sich lediglich um ein Verfahren zur Verkürzung der Rechenzeit. Rekursives Verfeinern, d.h. Verfeinern von Gebieten innerhalb schon bestehender Refinements, ist selbstverständlich erlaubt, und bei den Simulationen wurde eine maximale Verschachtelung von vier Verfeinerungsebenen erreicht. Zur Verdeutlichung ist in Abb.8 ein Schnitt der Dicke $15h^{-1}$Mpc durch die Simulation des ΛCDM-Modells aus Tabelle 1 gezeigt. Die Bereiche, die von der normalen PP-Summation ausgeschlossen wurden, sind mit blauen Quadraten markiert (Refinements). In der Abbildung wird nun die Verschachtelung von verfeinerten Regionen deutlich sichtbar. Bei den rot markierten Objekten handelt es sich um Galaxienhaufen, die mit dem 'Friends-Of-Friends'-Verfahren identifiziert worden sind, auf das im nun folgenden Abschnitt näher eingegangen wird.

3.4 Identifikation von Teilchengruppen

Eines der grundlegendsten Probleme bei der Analyse von numerischen Simulationen ist die Identifikation von (zusammengehörigen) Teilchengruppen. Da die kontinuierlich verteilte Materie des Universums durch diskrete Massenpunkte (ein einzelner dieser Punkte wiegt in den vorliegenden Simulationen annähernd so viel wie eine gesamte Galaxie) wiedergegeben wird, ist es zu jedem Zeitpunkt, vor allem aber in der Endphase der Simulation, von entscheidender Bedeutung, physikalisch gebundene Systeme zu identifizieren, die man dann mit beobachtbaren Objekten wie z.B. Galaxienhaufen in Verbindung bringen kann. Zu diesem Zweck wurden unterschiedlichste Verfahren wie z.B. die Friends-Of-Friends (FOF) Analyse (Davis et al. 1985) oder aber die Spherical-Overdensity (SO) Methode (Lacey & Cole 1994) entwickelt, die sich in ihren Ergebnissen in erster Linie nur für massearme Gruppen bzw. Gruppen, die nur aus wenigen Teilchen bestehen, unterscheiden; die Eigenschaften der großen Haufen sind so gut wie ununterscheidbar. An dieser Stelle sollen diese beiden Gruppenidentifikations-Algorithmen vorgestellt werden sowie – der Vollständigkeit halber – einige andere Methoden (z.B. DENMAX (Gelb & Bertschinger 1994), hierarchisches FOF (Klypin et al. 1997)).

3.4.1 Friends-Of-Friends Analyse (FOF)

Bei dem Friends-Of-Friends Verfahren werden benachbarte Teilchen zu einer Gruppe zusammengefaßt, wobei der Abstand r_{ll} eines jeden Teilchens zum nächsten Nachbarn einen bestimmten Wert nicht überschreiten darf:

$$r_{ll} \leq ll \cdot \overline{x} \,. \tag{3.22}$$

Dieser Abstand wird normalerweise in der dimensionslosen Größe ll, der **L**inking-**L**änge angegeben, und $\overline{x}$ ist der mittlere Teilchenabstand, der sich wie folgt berechnet:

$$\overline{x} = \overline{\rho}^{\,-\frac{1}{3}} \,. \tag{3.23}$$

Bei dieser Art und Weise der Identifikation von Teilchengruppen wird keine Geometrie der resultierenden Objekte bevorzugt. Die Galaxienhaufen sind einzig und allein durch die Positionen der sie bildenden Teilchen bestimmt.

Anschaulich läßt sich die Methode so verstehen, daß um jedes einzelne Teilchen eine Sphäre mit dem Radius r_{ll} gelegt wird. Falls zwei Sphären überlappen, so werden die beiden korrespondierenden Teilchen zu einer 'Gruppe' verbunden. Falls eines dieser beiden Teilchen zusätzlich mit einem weiteren verbunden ist, so werden alle drei Teilchen zu einer Gruppe zusammengefaßt. Dieser Vorgang wiederholt sich so lange, bis zu keinem der schon gruppierten Teilchen noch ein weiterer – nicht schon berücksichtigter – Nachbar gefunden werden kann, der ebenfalls das Kriterium (3.22) erfüllt.

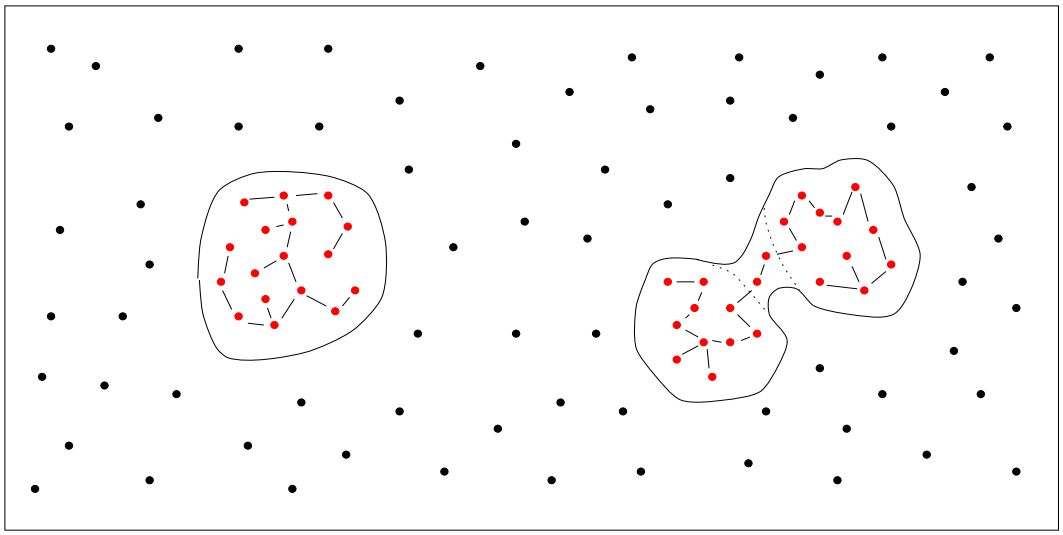


Abbildung 9: Veranschaulichung des Prinzips der Friends-Of-Friends Identifikation von Teilchengruppen.

Dieses Schema ist in Abb.9 an Hand einer Skizze in der Ebene verdeutlicht. Die maximale Länge einer Verbindungslinie beträgt in diesem Bild r_{ll}. Die Definition von Galaxienhaufen über Gl.(3.22) impliziert, daß zwei Haufen eventuell durch eine Brücke bestehend aus wenigen Teilchen verbunden werden können und somit in der Liste der Teilchengruppen als ein einziges Objekt in Erscheinung treten. Dieses Problem ist im rechten Teil des Bildes skizziert.

Man kann das FOF-Verfahren nicht nur zur Identifikation von Teilchengruppen verwenden; es läßt sich ebenso als eigenständige Statistik zur quantitativen Analyse von numerischen Simulationen und Beobachtungskatalogen heranziehen (Einasto et al. 1984). Wählt man z.B. den Wert für ll sehr klein, so wird man keine Teilchengruppen ausmachen, da jedes Teilchen für sich isoliert bleibt. Bei einer zu großen Wahl für die Linking-Länge erhält

Tabelle 2: Dichtekontraste $\delta_{\rm TH}(\Omega_0, \lambda_0)$ nach Kitayama & Suto (1996) und die entsprechenden Linking-Längen ll.

Simulation	$\delta_{\rm TH}$	ll
SCDM	178	0.20
ΛCDM	334	0.16
OCDM1	402	0.15
OCDM2	278	0.17

man lediglich ein einziges Objekt: alle Teilchen werden zu einer Gruppe zusammengefaßt. Man kann also sagen, daß die Anzahl der identifizierten Objekt von N (im Fall sehr kleiner ll) bis zu 1 hin abfällt, wenn ll sukzessiv vergrößert wird. Eine besondere Bedeutung ist dabei dem Wert ll_c zugeschrieben, für den in der Simulation ein Objekt gefunden wird, welches von einer Kante der Box bis zur gegenüberliegen reicht; man nennt dieses Ereignis 'Perkolation[9]'. Aus diesem Grund wird das FOF-Verfahren manchmal auch als Perkolations-Analyse bezeichnet.

Zur Identifikation von (gebunden) Teilchengruppen verwendet man typischerweise einen Wert von $ll \simeq 0.2$ für die Linking-Länge, was sich wie folgt begründet: Der Dichtekontrast $\delta_{\rm TH} = (\rho - \overline{\rho})/\overline{\rho}$ eines virialisierten Objekts nach einem sphärisch-symmetrischen Top-Hat-Kollaps in einem Einstein-de-Sitter Universum beträgt $\delta_{\rm TH} \simeq 178$ (vgl. Anhang A.4). Unter der Annahme eines isothermen Dichteprofils $\rho(r) \propto 1/r^2$ korrespondiert dieser Wert mit einer Linking-Länge von $ll = 0.2$ (Frenk et al. 1988, Lacey & Cole 1994). Um Werte für andere kosmologische Modelle zu erhalten, wurden mittels der im Anhang A.4 abgeleiteten Formeln aus die Dichtekontraste $\delta_{\rm TH}(\Omega_0, \lambda_0)$ gebundener Objekte nach einem Sphärischen-Top-Hat-Kollaps in beliebigen Weltmodellen berechnet, und anschließend die Beziehung

$$ll(\delta_{\rm TH}) = 0.2 \left(\frac{178}{\delta_{\rm TH}(\Omega_0, \Omega_{\Lambda,0})} \right)^{1/3} \tag{3.24}$$

zur Bestimmung einer entsprechenden Linking-Länge verwendet. In Tabelle 2 sind für die numerischen Simulationen aus Tabelle 1 die verwendeten Linking-Längen ll und die zugehörigen Dichtekontraste $\delta_{\rm TH}(\Omega_0, \Omega_{\Lambda,0})$ angegeben.

3.4.2 Andere Algorithmen

Neben der sehr einfach zu programmierenden FOF-Methode existieren noch weitere, ausgefeilterte Verfahren zum Auffinden von gebundenen Objekten in numerischen Simulationen. In diesem Abschnitt sollen noch zwei davon im Detail vorgestellt werden; bei allen anderen handelt es sich in erster Linie um Kombinationen bzw. Abwandlungen. Alle Algorithmen haben lediglich das Ziel, in einer numerischen Simulation nach (physikalisch) gebundenen Objekten zu suchen, und sie unterscheiden sich in erster Linie von der im

[9] engl. *to percolate* durchtropfen

letzten Abschnitt vorgestellten FOF-Methode dadurch, daß sie nicht nur die Teilchenpositionen, sondern ebenfalls die Dichte bzw. dynamische Aspekte mit ins Spiel bringen.

Spherical-Overdensity Bei der Spherical-Overdensity-Methode (Lacey & Cole 1994) geht man davon aus, daß es sich bei den gesuchten Gruppen um sphärisch-symmetrische Objekte handelt, und richtet seine Suche speziell darauf aus. Dieses Verfahren verhindert zwar u.a. das 'Zusammenlinken' zweier Gruppen, wie es bei dem FOF-Verfahren vorkommen kann, allerdings legt man sich auch auf eine vorgegebene Geometrie der Teilchengruppe fest.

Zuerst wird bei diesem Algorithmus die Dichte an jedem einzelnen Teilchenort bestimmt. Dies kann entweder mit Hilfe eines Gitters und anschließender Rückinterpolation zu den Teilchenorten geschehen (vgl. PM-Rechnung, Abschnitt 3.3.3), oder aber man verschafft sich die Dichte, indem man vom Teilchenort ausgehend die Dichte in einer Sphäre von angemessener Größe bestimmt. Anschließend werden die Teilchen entsprechend kleiner werdender Dichte sortiert. Die Position des 'dichtesten' Teilchens dient als Mittelpunkt für eine Kugelsphäre mit einem festen Radius R. Man vergleicht nun die Dichte ρ_R, gemittelt über diese Sphäre, mit einem vorher festgesetzten Schwellenwert $\kappa\overline{\rho}$ ($\kappa \simeq 180$ liefert in einem Einstein-de-Sitter Universum gravitativ gebundene Systeme). Ist die Dichte ρ_R größer als dieser Wert, dann wird der Radius vergrößert und die Dichte ρ_R erneut berechnet. Diese Prozedur wiederholt sich so lange, bis der Dichtewert unter den Schwellenwert $\kappa\overline{\rho}$ fällt. Dann berechnet man den Massenschwerpunkt aller Teilchen innerhalb der letzten Sphäre und benutzt ihn als neuen Ausgangspunkt für eine weitere Iteration mit sukzessiv größer werdenden Sphären. Das Verfahren stoppt, wenn der Massenschwerpunkt gegen einen festen, nicht weiter veränderlichen Wert konvergiert. Jetzt werden alle Teilchen innerhalb der Sphäre von der Liste mit den Dichtewerten entfernt und man startet einen neuen Durchlauf mit dem nun dichtesten Teilchen. Das Verfahren endet, sobald keine Teilchen mehr in der Liste enthalten sind.

Genau wie bei der FOF-Analyse ist dieses Verfahren durch einen einzigen Parameter charakterisiert, den Schwellenwert κ. Er gibt, ebenso wie die Linking-Länge ll, die Grenze der Dichte im Randbereich der identifizierten Objekte an. Wie schon eingangs erwähnt, unterscheiden sich die FOF-Objekte jedoch im Endresultat von den SO-Gruppen nur sehr wenig; beide Verfahren finden an den gleichen Positionen Objekte von annähnernd derselben Masse und denselben physikalischen Eigenschaften (Cole & Lacey 1996, Eke et al. 1996a).

DENMAX Das DENMAX-Verfahren (Gelb & Bertschinger 1994) verwendet als Ausgangspunkt nicht die Dichte an den Teilchenorten, sondern das auf einem Gitter geglättete Dichtefeld. Dieses Dichtefeld dient als Potential, in dem sich die Teilchen bewegen:

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = -\nabla\Phi_\rho, \quad \text{mit } \Phi_\rho = -\frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{3.25}$$

Die Zeitvariable τ ist lediglich als Integrationsvariable zu verstehen und steht in keinem Zusammenhang zu der 'wahren' Zeit t.

Nach einer angemessen Zahl von Integrationsschritten sammeln sich die Teilchen in den Potentialmulden, die in diesem Fall den Dichtemaxima entsprechen. Nun werden die Indizes der jeweiligen Teilchen an den einzelnen Dichtemaxima gespeichert. Die gesuchten Teilchengruppen ergeben sich aus den ursprünglichen Positionen dieser Teilchen. Um sicher zu sein, nur die gravitativ gebundenen Teilchen im Haufen zu haben, wird zusätzlich noch jedes Teilchen i einem Energie-Kriterium unterworfen: Die Gesamtenergie

$$E_i = \frac{1}{2}m|\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{halo}}| + \sum_{i \neq j}^{N_{\text{halo}}} \Phi(r_{ij}) \tag{3.26}$$

wird berechnet, und falls $E_i > 0$ gilt, so wird das Teilchen aus dem Halo entfernt. Die Größe $\vec{v}_{\text{halo}}$ ist hierbei die Geschwindigkeit des Masenschwerpunkts und $\Phi(r)$ das Potential, in dem sich die Teilchen befinden. Nach dem Überpüfen aller Teilchen muß $\vec{v}_{\text{halo}}$ neuberechnet und die Prozedur so lange wiederholt werden, bis kein Teilchen mehr als ungebunden identifiziert wird.

Dieses Verfahren ist sehr genau, und es geht ebenso wie die FOF-Methode nicht von einer spezifischen Geometrie der Teilchengruppen aus. Allerdings ist es sehr zeitaufwendig in der Anwendung.

Verbesserungen und Kombinationen Eine mögliche Verbesserung des Standard-FOF-Verfahrens kann man z.B. dadurch erzielen, daß man nicht nur *eine* Linking-Länge verwendet. Die hierarchische Friends-Of-Friends Methode (Klypin et al. 1997) bedient sich der Längen: ll, $ll/2$, $ll/4$ und $ll/8$. Mit den so erzielten Ergebnissen läßt sich nun direkt verfolgen, ob eine Teilchengruppe zu höheren Überdichten hin in ein (oder mehr) Objekte zerfällt, oder aber ob es sich wirklich um ein einzelnes Objekt handelt. Ebenso läßt sich die Linking-Länge variabel (und der lokalen Dichte angepaßt) variieren (Adaptive FOF, van Kampen 1995). Ebenso kann man die Ergbenisse der FOF-Analyse, gewonnen mit einer relativ kleinen Linking-Länge (z.B. $ll = 0.1$), als Startobjekte für die Spherical-Overdensity-Methode verwenden (Croft & Efstathiou 1994).

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die kosmologischen Modelle vorgestellt, welche die Grundlage für die Auswertung in den Kapitel 5 und 6 bilden. Es handelt sich hierbei um ein Standard CDM Modell, das als Referenz bzw. Vergleich zu realistischeren Varianten verwendet wurde, sowie um ein weiteres Modell mit ebenfalls euklidscher Geometrie, das allerdings einen Dichteparameter $\Omega_0 < 1$, dafür aber eine kosmologische Konstante $\lambda_0 = 1 - \Omega_0$ aufweist. Zusätzlich zu diesen beiden geometrisch flachen wurden noch zwei offene Modelle mit den Dichteparametern $\Omega_0 = 0.3$ und $\Omega_0 = 0.5$ gerechnet. Alle Modelle sind an Hand der vierjährigen Messung der Temperaturfluktuationen in der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den COBE-Satelliten normiert. Die Eingangs-Powerspektren wurden dazu mit Hilfe des Programm-Paketes CMBFAST von Seljak & Zaldarriaga (1996) berechnet. Die Boxgröße wurde auf 400 Mpc festgesetzt, so daß sich die derzeit größten Strukturen

($\sim$ 100 h^{-1}Mpc) ebenfalls in den Simulationen widerspiegeln können. Für alle Simulationen wurden 128^3 Teilchen verwendet, deren gegenseitige Wechselwirkung ab einer Rotverschiebung von $z = 25$ mit Hilfe einer abgewandelten Version des frei verfügbaren AP^{3}M-Codes von Couchman (1991) in 500 Integrationsschritten bis zum heutigen Zeitpunkt $z = 0$ simuliert wurde.

Das Verfahren zur Bestimmung der Wechselwirkung eines Vielteilchensystems wurde dazu an Hand des verwendeten AP^{3}M-Code im Detail erläutert. Für die Bestimmung der anfänglichen Verteilung von Teilchenkoordinaten und -geschwindigkeiten wurde die Repräsentation der anfänglichen Dichtefluktuationen auf einer Glass-Verteilung benutzt. Die Integration der Newtonschen Bewegungsgleichungen erfolgt in mitbewegten Koordinaten, die in Abschnitt 3.3 ausführlich vorgestellt wurden. Auf diese Art und Weise beschränkt man sich bei der Lösung lediglich auf die gegenseitige Wechselwirkung und eleminiert das Auseinanderdriften des Koordinatensystems aus den Teilchentrajektoren, verursacht durch die Expansion des Universums. Da man sehr enge Stöße zwischen Teilchen in den Simulationen vermeiden muß, wurde das Prinzip des Softenings bei sowohl der direkten Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung (S_2-Sphären), als auch bei Gitterverfahren erläutert. PP- und PM-Kraft müssen zur Bestimmung der korrekten Wechselwirkung zweier Teilchen aufeinander so aneinandergepaßt werden, daß das $1/r^2$-Gesetz reproduziert wird. Abschließend wurde eine Methode aufgezeigt, mit der sich unter Verwendung von neuen, verfeinerten Gittern, die Rechenzeit verkürzen läßt.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels befaßte sich dann mit der Identifikation von Teilchengruppen in den numerischen Simulationen. Das Friends-Of-Friends-Verfahren, welchem die in Kapitel 4, Kapitel 5 und Kapitel 6 verwendeten Galaxienhaufen zu Grunde liegen, wurde ausführlich vorgestellt und mit anderen Algorithmen, wie z.B. der Spherical-Overdensity-Methode verglichen.

Kapitel 4

Auflösungseffekte in Numerischen Simulationen

In kosmologischen Simulationen wird die kontinuierliche Verteilung der Dunklen Materie durch diskrete Massenpunkte approximiert (vgl. Kapitel 3). Dadurch kann es zwangsläufig zu numerischen Effekten kommen, die einen entscheidenden Einfluß auf die Qualität der Simulation haben. Da unterschiedliche N-Body-Codes auch unterschiedliche Verfahren zur Bestimmung der gegenseitigen Wechselwirkung verwenden, stellt sich die Frage, ob die Ergebnisse untereinander vergleichbar sind. Zu diesem Zweck wurden zwei verschiedene Codes zur Entwicklung identischer Startverteilungen herangezogen und die Endergebnisse miteinander verglichen. Hierbei handelt es sich zum einen um den Code, der auch zur Simulation der in Kapitel 5 und Kapitel 6 analysierten Modelle verwendet und in Kapitel 3 ausführlich beschreiben wurde (AP^{3}M-Code, Couchman 1991), und zum anderen um einen adaptiven PM-Code, der eine Verbesserung der räumlichen Auflösung durch das Plazieren von neuen, verfeinerten Gittern in überdichten Regionen erreicht (Kravtsov et al. 1997). Der AP^{3}M-Code kann ebenfalls als herkömmlicher PM-Code verwendet werden, was eine weitere, dritte Vergleichsmöglichkeit bereitstellt. Zusätzlich wurden in den einzelnen Durchläufen Parameter wie z.B. die räumliche Auflösung und die Anzahl der Integrationsschritte variiert. Melott et al. (1997) behaupten, daß den Ergebnissen für Abstände kleiner als der mittlere Teilchenabstand keine physikalische Bedeutung zugeschrieben werden kann. Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, muß zur Vermeidung von Singularitäten bei der Berechnung der gegenseitigen Wechselwirkung mittels direkter Summation (vgl. Abschnitt 3.3.2) ein Softening eingeführt werden, welches die minimale räumliche Auflösung definiert. In diesem Kapitel wird u.a. gezeigt, daß die Ergebnisse auf Skalen zwischen dem Softening und dem mittleren Teilchenabstand sowohl verläßlich als auch für verschiedene N-Body-Codes untereinander vergleichbar sind. Trotzdem beobachtet man beim AP^{3}M-Verfahren, daß es auf Grund der direkten Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung zu unphysikalischen Stößen und somit einer Verletzung des approximierten Flüssigkeitsbildes kommt, falls ein 'Gleichgewicht' zwischen Integrationsschrittweite und Softening nicht erfüllt ist.

4.1 Die Simulationen

4.1.1 Der Adaptive Refinement-Tree-Code (ART)

Der ART-Code (Kravtsov et al. 1997) zeichnet sich dadurch aus, daß er das zeitlich effektive PM-Verfahren zur Berechnung der gegenseitigen Wechselwirkung mit einem Algorithmus verbindet, der eine Erhöhung der Kraftauflösung in dichten Gebieten gewährleistet. Das geschieht durch die Einführung von Refinements, wie sie in ähnlicher Form auch schon in Abschnitt 3.3.4 vorgestellt worden sind. Allerdings dienen jetzt die Verfeinerungen nicht der Verkürzung der Rechenzeit, sondern der Verbesserung der räumlichen Auflösung der Kraft in diesen Bereichen; das anfängliche PM-Gitter legt somit lediglich die minimale Auflösung fest. Das Kriterium zum Plazieren eines Refinement wird für jede Gitterzelle einzeln geprüft, was impliziert, daß die verfeinerten Regionen nicht zwingend eine rechteckige Gestalt aufweisen müssen. Diese Methode garantiert somit, daß lediglich die 'interessanten' Bereiche der Simulationsbox besser aufgelöst werden bzw. nur die Regionen hoher Dichte verfeinert werden. Dies ist gerade bei der Anwendung auf kosmologische Modelle angemessen, in denen sich Filamente bzw. großräumige Strukturen ausbilden. Zusätzlich wird beim ART-Code darauf geachtet, daß nach jedem Schritt das Refinement an die neue Verteilung der Teilchen angepaßt wird, was einer kompletten Neuberechnung der Verfeinerung selbstverständlich vorzuziehen ist. Das Kriterium zum Verfeinern einer Gitterzelle ist nun dadurch festgelegt, daß die Dichte (in dieser Zelle) den Wert $n = 5$ nicht überschreiten darf. Dazu werden die Teilchen mittels eines **C**loud-**I**n-**C**ell-Verfahrens (CIC) an das Gitter zugewiesen, was einer 'Verschmierung' eines jeden Teilchens an die nächsten acht Gitterstützstellen gleichkommt. Ist die Dichte größer als der voreingestellte Grenzwert $n = 5$, dann wird die Zelle in acht gleichgroße Unterzellen aufgeteilt. Falls eine dieser Unterzellen immer noch einen zu hohen Wert für die Dichte aufweist, wird diese Unterzelle ebenfalls in acht neue Zellen unterteilt usw.

Die Lösung der Poisson-Gleichung erfolgt nun zuerst auf dem gesamten (Basis-)Gitter der obersten Ebene der Hierarchie der Verfeinerungen. Die Refinements werden dann sukzessiv abgearbeitet, wobei die Integration der Poisson-Gleichung der Lösung eines Dirichlet-Randwertproblems entspricht, bei dem die Randbedingungen aus der schon existieren Lösung des jeweils übergeordneten Gitters ermittelt werden. Es findet keine direkte Teilchen-Teilchen-Summation statt, so daß die Auflösung auf jeder Refinementebene nicht besser als zwei Gitterzellen sein kann. Allerdings wird durch die Hierarchie der Refinements und das Kriterium zum Plazieren der Verfeinerung gewährleistet, daß pro Gitterzelle (im Falle einer CIC-Zuweisung der Teilchen an das Gitter) in etwa ein Teilchen enthalten ist. Die für dieses Kapitel verwendete Version des ART-Codes unterscheidet sich dabei von der ursprünglichen, da zusätzlich zur Verfeinerung der Gitter auch noch die Schrittweite an das jeweilige Refinement angepaßt wird. Bei der Erzeugung einer neuen Verfeinerungsebene wird die neue Schrittweite auf die Hälfte des Wertes der übergeordneten Ebene gesetzt. Der Code verwendet dabei den Expansionsfaktor a als Integrationsvariable, so daß die sich die Schrittweite der n.Ebene als $\Delta a_n = \Delta a_0/2^n$ schreiben läßt. Die Anzahl der verwendeten Integrationsschritte (vgl. Tabelle 3) basiert dabei auf einer Konvergenzstudie, die so konzipiert wurde, daß sich ein Einzelteilchen

in einem einzigen Integrationsschritt nie weiter als eine halbe Gitterzelle bewegen kann (Kravtsov et al. 1998).

4.1.2 Der AP^{3}M-Code

Die genaue Beschreibung des AP^{3}M-Codes findet sich in Kapitel 3 und soll an dieser Stelle nicht wiederholt werden. Allerdings ist es notwendig, auf die Unterschiede zum ART-Code hinzuweisen, da in diesem Kapitel gerade die Einflüsse verschiedener Integrationsverfahren auf die Endergebnisse überprüft werden sollen.

Neben der Tatsache, daß die Bewegungsgleichungen (vgl. Gl.(3.15), S.28) beim AP^{3}M-Code durch eine Kombination von direkter Summation und Gitterverfahren (im Vergleich zu einer reinen Gittermethode beim ART-Code) gelöst werden, unterscheiden sich die beiden Codes auch in der Form der Bewegungsgleichungen selbst. Der AP^{3}M-Code beruht auf Differentialgleichungen mit $p = a^{3/2}$ als Zeitvariable (vgl. Anhang B), wohingegen beim ART-Code der Expansionsfaktor a zur Integration benutzt wird. Beim AP^{3}M-Code werden zwar auch Refinements verwendet, in erster Linie aber nur um die Rechenzeit zu verkürzen. Die insgesamt erzielte Kraftauflösung ist lediglich an die Berechnung des PP-Anteils der Kraft gekoppelt, was zu Effekten führen kann, die Einfluß auf die Ergebnisse haben (vgl. Abb.12) und im folgenden genauer spezifiziert werden.

4.1.3 Die Parameter

Obwohl der Vergleich der beiden Codes unabhängig vom kosmologischen Modell erfolgen kann, wurde doch ein Standard CDM-Modell als Grundlage für die Simulationen herangezogen. Es handelt sich dabei um ein COBE-normiertes Modell in einer Box der Kantenlänge 15 h^{-1}Mpc und 64^3 Teilchen auf einem (Grund-)Gitter mit 128^3 Stützstellen. Die Simulationen wurden alle mit *identischen* Anfangsverteilungen bei einer Rotverschiebung $z = 87$ gestartet. Die Masse eines Teilchen beträgt somit $m_p = 3.6 \cdot 10^9 h^{-1} M_\odot$ (vgl. Gl.(3.2), S.23). Die verschiedenen Durchläufe der Simulationen unterscheiden sich nun sowohl in der Kraftauflösung, als auch in der Anzahl der verwendeten Integrationsschritte; die beiden ART-Simulationen allerdings nur in der Schrittweite. Um eine weitere Vergleichsmöglichkeit zu erhalten, wurde der AP^{3}M-Code ebenfalls als PM-Code verwendet, indem sowohl der adaptive als auch der PP-Teil abgeschaltet wurden. Die Parameter der insgesamt neun Simulationen sind in Tabelle 3 zusammengefaßt. Der dynamische Bereich berechnet sich dabei wie folgt:

$$\text{dyn. Bereich} = \frac{\text{Boxgröße}}{\text{Kraftauflösung}} = \frac{\text{Gitterstützstellen}}{\text{Softening}} \tag{4.1}$$

und ist ein effektives Maß für die Auflösung der Kraft in den Simulationen. Die Anzahl der Integrationsschritte beim ART-Code bezieht sich auf die Schrittweite a_0, die auf dem Grund-Gitter mit 128^3 Stützstellen verwendet wurde. Die Parameter wurden so gewählt, daß zum einen Simulationen mit derselben Kraftauflösung, aber einer unterschiedlichen Anzahl von Integrationsschritten verglichen werden können (z.B. AP^{3}M1 mit

Tabelle 3: Parameter der Vergleichssimulationen. Das Softening (vgl. Abschnitt 3.1) ist zum einen in Gittereinheiten und in h^{-1}kpc (in Klammern) angeben.

Simulation	Softening		dyn. Bereich	Integr.-Schritte
AP^{3}M5	0.06	(7.0)	2133	8000
AP^{3}M1	0.03	(3.5)	4267	8000
AP^{3}M4	0.03	(3.5)	4267	2000
AP^{3}M2	0.02	(2.3)	6400	6000
AP^{3}M3	0.015	(1.8)	8544	6000
ART1	0.03125	(3.7)	4096	660
ART2	0.03125	(3.7)	4096	330
PM1	—	(234)	128	6000
PM2	—	(234)	128	1500

AP^{3}M4), zum anderen aber auch Durchläufe mit gleicher Schrittweite und unterschiedlicher Kraftauflösung (z.B. AP^{3}M1 mit AP^{3}M5). Außerdem sollen die Ergebnisse der beiden Codes AP^{3}M und ART untereinander verglichen und quantitative Unterschiede herausgearbeitet werden, die durch unterschiedliche Integrationsverfahren bei der Lösung der Bewegungsgleichungen entstehen können. Es muß dabei unbedingt bedacht werden, daß das (simulierte) Kraftgesetz ebenfalls vom verwendeten Code abhängt. In den AP^{3}M-Durchläufen werden die Teilchen als eine S_2-Sphäre angesehen (vgl. Abschnitt 3.3.2), wohingegen im ART-Code das Kraftgesetz eine andere Gestalt hat: Die Auflösung im ART-Code beträgt in jedem Fall immer zwei Gitterstützstellen, da die Berechnung der gegenseitigen Wechselwirkung auf der PM-Methode beruht. Aus diesem Grund werden die Simulationen AP^{3}M5 und ART1 bevorzugt miteinander verglichen, da die effektive Kraftauflösung der ART1-Simulation dem Softening im AP^{3}M5-Durchlauf entspricht.

Die detaillierten Unterschiede zwischen den einzelnen Vergleichssimulationen sollen jetzt an Hand von einigen statistischen Auswerteverfahren sowohl in der Verteilung der Teilchen an sich, als auch durch Abweichungen bei den physikalischen Eigenschaften von FOF-Haufen, die als Halos die Entstehung von Galaxien in den numerischen Simulationen markieren können, untersucht werden.

4.2 Eigenschaften der Teilchenverteilung

Visualisierung der Verteilung

Als erstes empfiehlt es sich, einen Blick auf die Verteilung der Teilchen in der gesamten Simulationsbox zu werfen, um einen visuellen Eindruck von Unterschieden bzw. Ähnlichkeiten zu erhalten. In Abb.10 findet sich ein Schnitt der Dicke 3 h^{-1}Mpc durch die Simulation des ART1-, AP^{3}M5-, und PM1-Durchlaufs; der in der oberen Reihe markierte Bereich ist dabei in der unteren Reihe vergrößert dargestellt. Man erkennt an Hand dieser Abbildung, daß alle Simulationen dieselbe globale Verteilung der Teilchen aufwei-

sen, jedoch wird auch die schlechte Auflösung des PM-Verfahrens deutlich. Die beiden hochauflösenden Codes liefern hingegen Ergebnisse, die auf den ersten Blick nur schwer zu unterscheiden sind. Die Strukturen in den überdichten Gebieten stimmen sehr gut überein, auch wenn die Zentren der Teilchengruppen auf Grund der unterschiedlichen Integrationsroutinen ein wenig versetzt erscheinen. Vergleicht man dieses Bild jedoch mit der Abbildung in Suisalu & Saar (1995b) (Abb.1 und Abb.2 in der Veröffentlichung), so erkennt man, daß die hier vorgestellten Vergleichssimulationen erheblich besser übereinstimmen, als es deren Rechnungen nahelegen. Suisalu & Saar schreiben die Unterschiede in den Koordinaten direkten Teilchen-Teilchen-Stößen zu, ohne das jedoch detailliert zu begründen. Sie argumentieren lediglich, daß diese 'Streuung' *entweder* durch Kollisionen *oder* durch Einflüsse des mittleren Gravitationsfeldes verursacht wird.

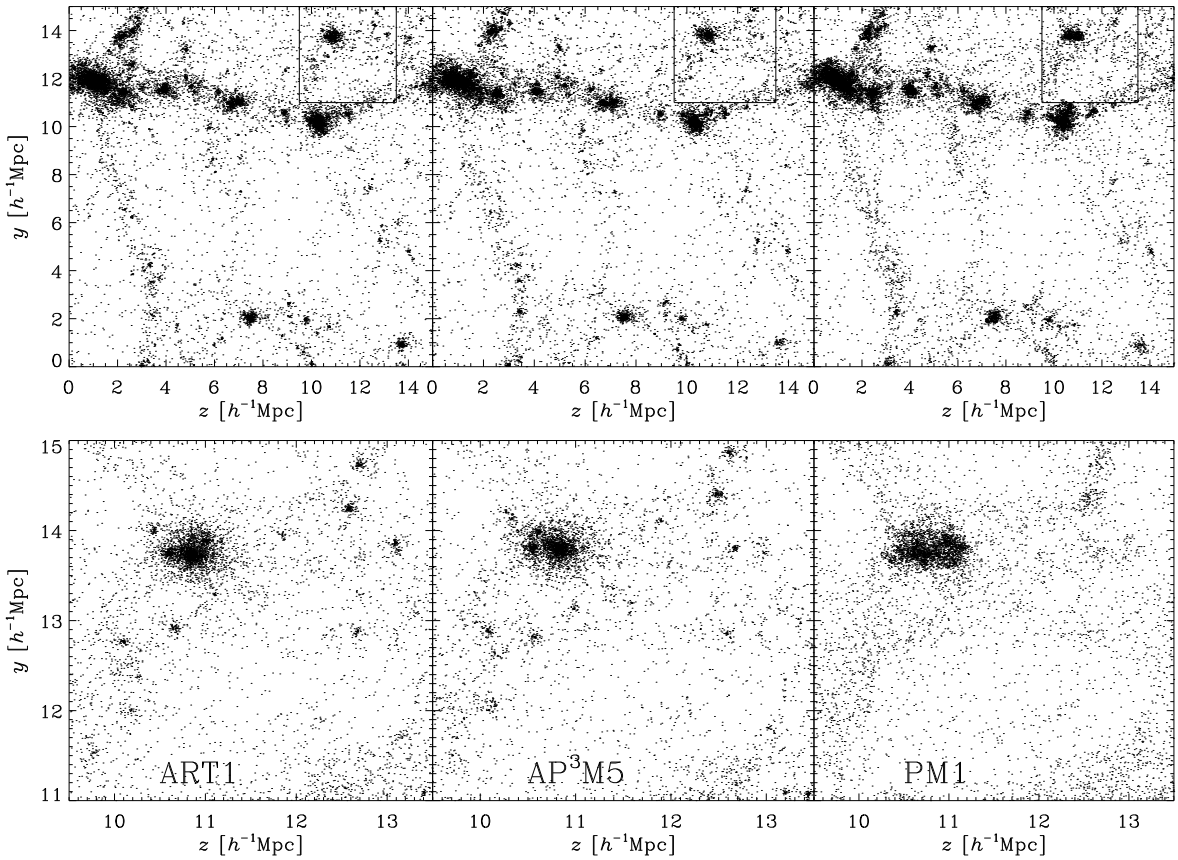


Abbildung 10: Schnitt der Dicke $3h^{-1}\mathrm{Mpc}$ (obere Reihe) durch die ART1-, AP^{3}M5- und PM1-Simulation. In der unteren Reihe findet man die Ausschnittsvergrößerung des markierten Bereichs.

Kreuz-Korrelationskoeffizient

Der etwa von Coles (1993) in kosmologischen Strukturbildungsmodellen verwendete Dichte-Korrelationskoeffizient

$$K = \frac{< \delta_1 \delta_2 >}{\sigma_1 \sigma_2} \tag{4.2}$$

wurde ursprünglich zur Quantifizierung von Unterschieden in verschiedenen kosmologischen Modellen verwendet. Hierbei ist δ_1 die Dichte in der einen Simulation und δ_2 die entsprechende Dichte in der anderen Simulation; die Mittelung erfolgt über das gesamte Dichtefeld, wobei σ_1 und σ_2 die Varianzen sind. An dieser Stelle soll er jedoch zur Unterscheidung der Simulationen nach Tabelle 3, die auf ein und derselben Startverteilung beruhen, herangezogen werden (Splinter et al. 1998). Die Dichte wird zu diesem Zweck auf Gittern mit sukzessiv vergrößerter Anzahl der Stützstellen berechnet, was einer Analyse des Dichtefelds mit verschiedenen Glättungsskalen gleichkommt. In Tabelle 4 sind die Werte des Kreuz-Korrelationskoeffizienten (4.2) aufgelistet, wobei in den ersten drei Zeilen Simulationen verglichen werden, die sich lediglich in der Anzahl der Integrationsschritte unterscheiden. In den folgenden drei Zeilen liegen Unterschiede in der Kraftauflösung vor, und in den letzten vier Zeilen werden dann die Codes untereinander verglichen.

Allgemein beobachtet man, daß die Verfeinerung des Gitters zu immer schlechteren Übereinstimmungen der Simulationen führt; man untersucht in diesem Fall Gebiete sehr hoher Dichte, in denen die Trajektoren der einzelnen Teilchen in unterschiedlichen Durchläufen sicherlich voneinander abweichen (vgl. Abb.10). Die Verwendung eines Gitters mit z.B. 400^3 Stützstellen entspricht dabei einer Glättungsskala von 37.5 h^{-1}kpc. Somit ist es nicht verwunderlich, daß der Wert für K in diesem Fall, unabhängig von den verglichenen Simulationen, sehr gering ist, da auf Grund der unterschiedlichen Integrationsverfahren davon ausgegangen werden kann, Abweichungen in den einzelnen Trajektoren zu finden. Verwendet man jedoch ein recht grobes Gitter, so werden diese Unterschiede 'ausgeglättet', und man beobachtet eine sehr gute Übereinstimmung.

Der Vergleich von Simulationen mit unterschiedlichen Integrationsschritten zeigt, daß selbst die Vergrößerung der Schrittweite um einen Faktor 4 so gut wie keinen Einfluß auf den Kreuz-Korrelationskoeffizienten hat; der Wert für K fällt lediglich auf $K = 0.87$ bzw. $K = 0.72$ im Fall der ART-Durchläufe. Dies läßt sich darauf zurückführen, daß die 2000 Schritte für AP^{3}M4 bzw. die 330 für ART2 im Prinzip ausreichend sind, und die entsprechende Schrittweite nur in den überdichten Gebieten ein wenig zu groß gewählt ist. Ein direkter Vergleich der beiden PM-Rechnungen zeigt darüberhinaus, daß es in diesem Fall nicht die geringsten Abweichungen bei den Teilchenkoordinaten gibt, egal wie klein die Glättungsskala auch gewählt wird. Dieses Resultat ist nicht weiter verwunderlich, wenn man sich vor Augen hält, daß schon allein 1500 Integrationsschritte bei Verwendung eines PM-Codes mit 128^3 Gitterstützstellen zur Simulation von 64^3 Teilchen in einer 15 h^{-1}Mpc Box ausreichen; in diesem Fall ist nämlich gewährleistet (wie eine einfache Abschätzung zeigt), daß sich ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit von ca. 1000 km s^{-1} nicht weiter als eine halbe Gitterzelle pro Integrationsschritt bewegt.

Tabelle 4: Dichte-Korrelationskoeffizienten für Vergleiche zwischen Durchläufen mit unterschiedlichen Schrittzahlen, Kraftauflösungen und N-Body Codes.

			Gitter				
Simulation			32	64	128	256	400
ART1	$\leftrightarrow$	ART2	0.98	0.98	0.94	0.84	0.72
AP^{3}M1	$\leftrightarrow$	AP^{3}M4	0.98	0.98	0.98	0.93	0.87
PM1	$\leftrightarrow$	PM2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
AP^{3}M2	$\leftrightarrow$	AP^{3}M3	0.98	0.98	0.98	0.93	0.87
AP^{3}M1	$\leftrightarrow$	AP^{3}M5	0.98	0.99	0.99	0.96	0.91
AP^{3}M3	$\leftrightarrow$	AP^{3}M5	0.98	0.98	0.96	0.90	0.83
ART1	$\leftrightarrow$	AP^{3}M1	0.95	0.88	0.71	0.44	0.30
ART1	$\leftrightarrow$	AP^{3}M5	0.95	0.88	0.71	0.44	0.30
ART1	$\leftrightarrow$	PM1	0.96	0.92	0.80	0.60	0.47
AP^{3}M1	$\leftrightarrow$	PM1	0.95	0.90	0.79	0.61	0.48

Vergleicht man nun Durchläufe mit unterschiedlicher Kraftauflösung, so beobachtet man ebenfalls eine recht gute Übereinstimmung. Die Diskrepanz zwischen AP^{3}M2 und AP^{3}M3 läßt sich auf eine unangemessen hohe Kraftauflösung der AP^{3}M3-Simulation zurückführen, die später noch ausführlich diskutiert wird.

Erst beim Vergleich unterschiedlicher Codes miteinander erhält man bei Verwendung eines sehr feinen Gitters merkliche Unterschiede. Die Übereinstimmung ist dabei für AP^{3}M1 und PM1 am besten, was dadurch begründet werden kann, daß es sich im Prinzip um denselben Code handelt; die Integration der Bewegungsgleichungen erfolgt in beiden Fällen nach demselben Schema mit $p = a^{3/2}$ als Integrationsvariablen. Ebenso beobachtet man eine gute Korrelation zwischen ART1 und PM1. Die Unterschiede zwischen ART1 und AP^{3}M1 bzw. AP^{3}M5 reflektieren hingegen die Tatsache, daß die Positionen kleiner Teilchengruppen leicht gegeneinander verschoben sein können, wie man es z.B. in Abb.10 oder anderen Arbeiten (Frenk et al. 1999) beobachten kann.

Koordinaten-Differenzen

Da unterschiedliche Integrationsverfahren und auch unterschiedlich aufgelöste Durchläufe unweigerlich zu Abweichungen bei den Teilchentrajektoren führen, ist in Abb.11 die Differenz einzelner Koordinaten

$$|\Delta r| = |\vec{r}^{\,(i)}_{\mathrm{sim}_1} - \vec{r}^{\,(i)}_{\mathrm{sim}_2}| \tag{4.3}$$

gezeigt, wobei $\vec{r}^{\,(i)}_{\mathrm{sim}_1}$ die Position des Teilchens i in der Simulation 'sim_1' ist.

Man erwartet, daß die mittlere Abweichung der Koordinaten unterhalb der typischen Ausdehnung eines Galaxienhaufens liegt. Innerhalb der Haufen verlieren die Teilchen ihre 'Identität' und die Trajektoren vermischen sich derart, daß man nicht erwarten kann, die-

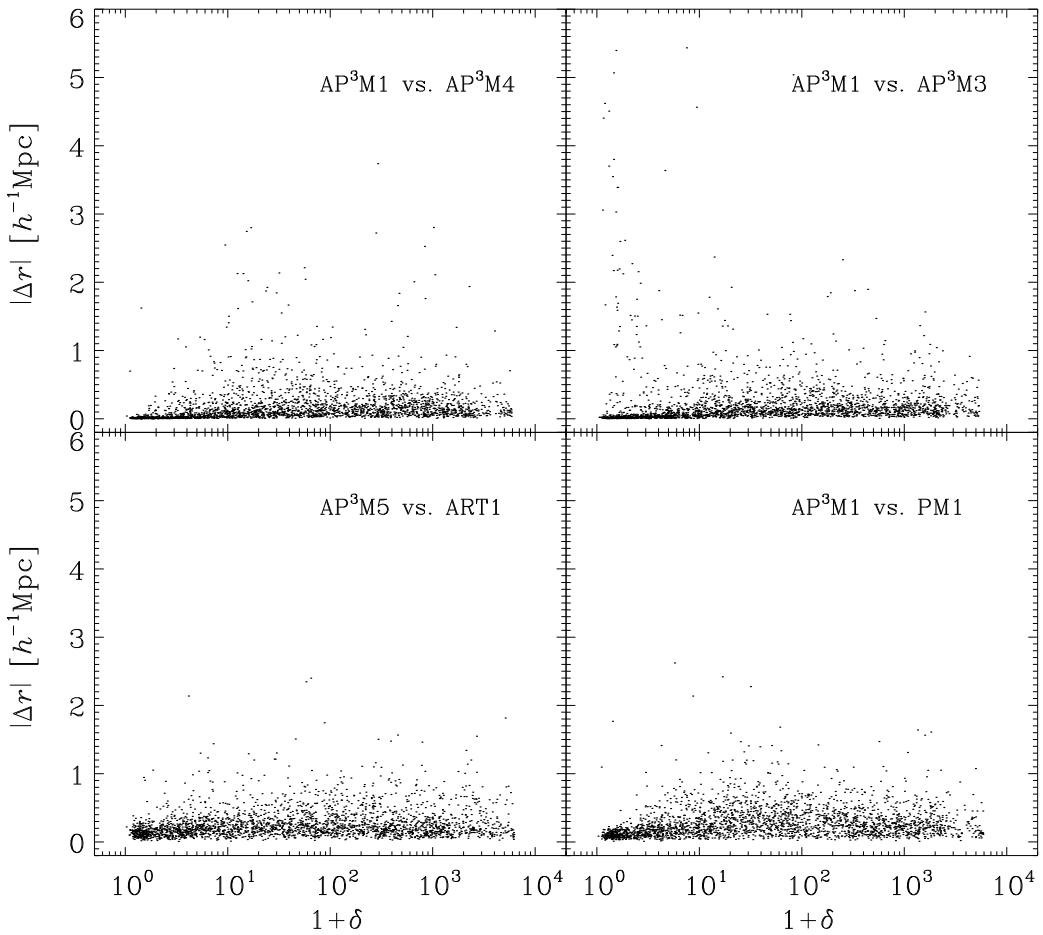


Abbildung 11: Abweichungen der Teilchenkoordinaten nach Gl.(4.3) zum Zeitpunkt $z = 0$ für jeweils 1% der Gesamtteilchen.

selben Teilchenbahnen in unterschiedlichen Simulationen zu beobachten. In unterdichten Gebieten hingegen sollten die Abweichungen geringer sein. Abb.11 zeigt nun den Wert für $|\Delta r|$ (nach Gl.(4.3)) in Abhängigkeit von der lokalen Überdichte $\delta_{\mathrm{sim}_1} = (\rho_{\mathrm{sim}_1} - \overline{\rho})/\overline{\rho}$ für 1% der gesamten Teilchen. In der oberen Reihe wurden Simulationen mit unterschiedlicher Schrittweite (links) und voneinander abweichender Kraftauflösung (rechts) verglichen. Die untere Reihe zeigt die Ergebnisse für einen Vergleich verschiedener Codes. Am auffälligsten sind dabei die 'Ausreißer' in unterdichten Regionen für den Vergleich von AP^{3}M1 mit AP^{3}M3. Es handelt sich um ca. 0.5% der abgebildeten Teilchen, die eine stärkere Abweichung als 2 h^{-1}Mpc aufweisen. Solche Ereignisse werden lediglich für Vergleiche, an denen die AP^{3}M3-Simulation beteiligt ist, beobachtet. In allen anderen Fällen verhält es sich wie erwartet: In unterdichten Gebieten ist die Streuung am geringsten, wobei sie zu dichten Regionen hin ansteigt und dort maximal $1.5h^{-1}$Mpc beträgt. Dies entspricht auch in etwa der Ausdehnung der massereichsten Galaxienhaufen (vgl. Abb.10). Es ist

nicht verwunderlich, daß man auch annähernd dieselbe Streuung für den Vergleich mit einer PM-Simulation beobachtet, da die Tatsache, daß die internen Strukturen eines Galaxienhaufens in der Simulation nicht so gut aufgelöst werden, nichts daran ändert, daß die Teilchen innerhalb überdichter Gebiete ebenfalls ihre Identität verlieren.

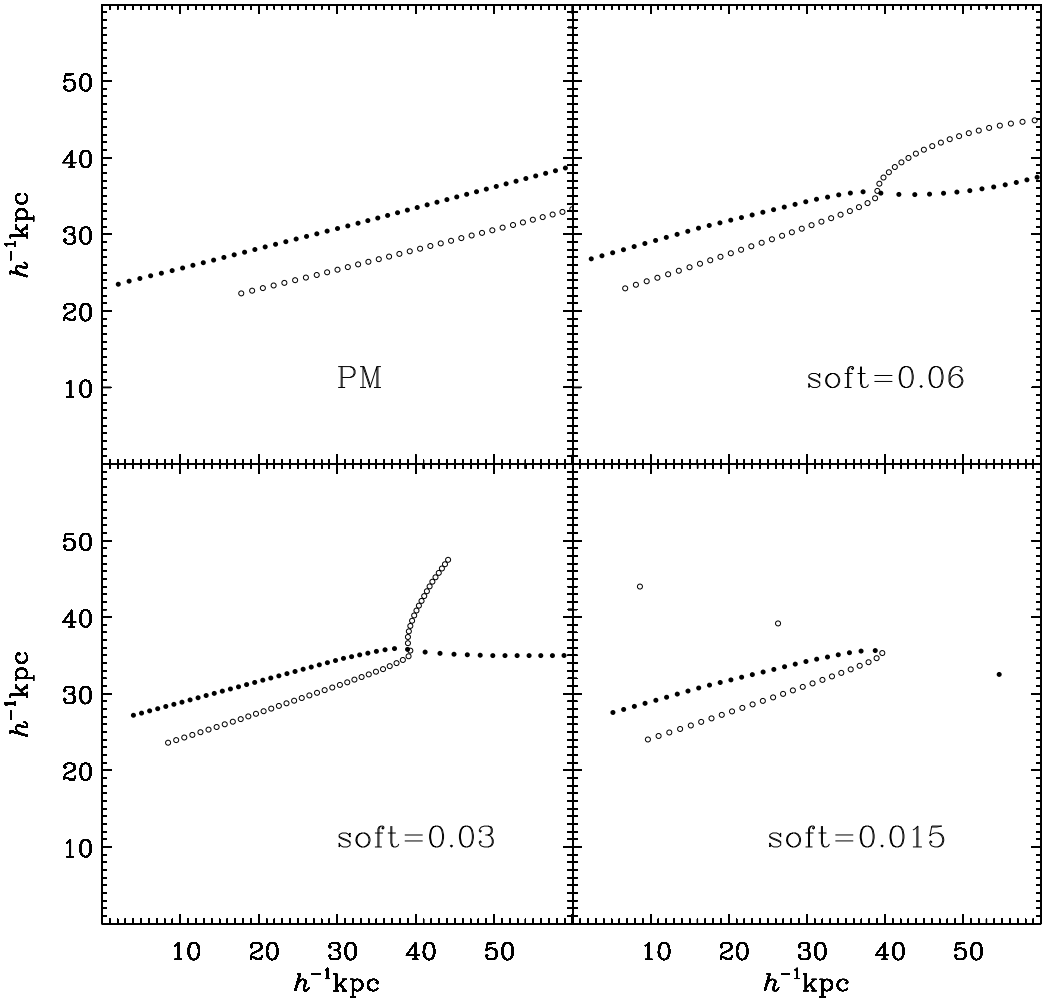


Abbildung 12: Teilchentrajektoren zweier Teilchen im AP^{3}M-Code für unterschiedliche Kraftauflösungen.

Teilchen-Teilchen-Stöße

Die Abweichungen für den Vergleich von AP^{3}M1 mit der hochaufgelösten AP^{3}M3-Simulation lassen sich durch (unerwünschte) Teilchen-Teilchen-Stöße erklären, die durch eine unangemessen hohe Auflösung bei der Berechnung der PP-Kraft auftreten (vgl. Abschnitt 3.1). Um das zu bestätigen, wurden für Abb.12 die Bahnen zweier Teilchen in

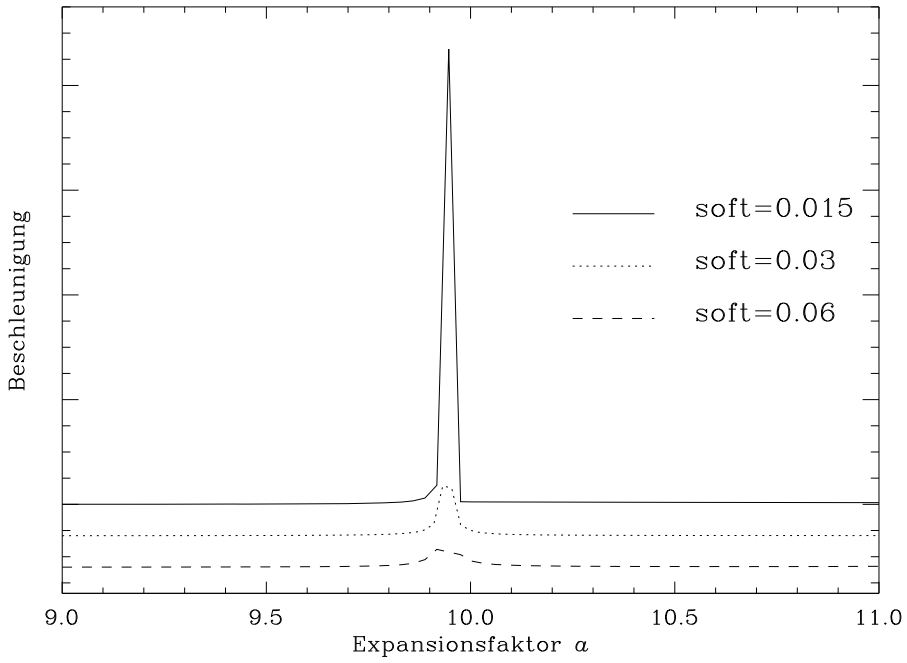


Abbildung 13: Beschleunigung (in willkürlichen Einheiten) eines der Teilchen (offene Kreise) aus Abb.12.

den Simulationen AP^{3}M5 (Softening 0.06), AP^{3}M1 (Softening 0.03), AP^{3}M3 (Softening 0.015), sowie PM1 im Detail verfolgt. Um das Bild nicht zu überladen, ist jedoch nur jeder zweite Integrationsschritt gezeigt. Es handelt sich hierbei um einen Ausschnitt der gesamten Simulationsbox im Rotverschiebungsintervall von $z \simeq 9$ bis $z \simeq 7$, aus dem alle weiteren Teilchen entfernt wurden. Zum einen erwartet man keinerlei Wechselwirkung zwischen den Teilchen in der PM-Simulation, da der abgebildete Bereich kleiner als eine Gitterzelle ist, andererseits erkennt man, daß mit steigender Auflösung die Teilchen immer stärker wechselwirken, was schließlich zu einer Verletzung der Energieerhaltung bzw. einer heftigen Kollision in der AP^{3}M3-Simulation führt: Die Teilchen können sich auf Grund des geringen Softening-Parameters extrem nahe kommen, erfahren eine sehr große Beschleunigung (vgl. Abb.13) und fliegen mit hohen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen auseinander. Solche Stöße sind verantwortlich für die 0.5% Ausreißer in Abb.11. Zur Verdeutlichung ist in Abb.13 die Beschleunigung des durch offene Kreise dargestellten Teilchens aus Abb.12 in willkürlichen Einheiten gezeigt. Man erkennt die ausgeprägte Spitze im Moment des engen Vorbeiflugs bei einer Rotverschiebung von $z \simeq 8$.

Die Bedingung für solch eine 'Streuung' läßt sich abschätzen, wenn man davon ausgeht, daß ein Zwei-Teilchen-Stoß stattfindet, falls die potentielle Energie der kinetischen Energie entspricht:

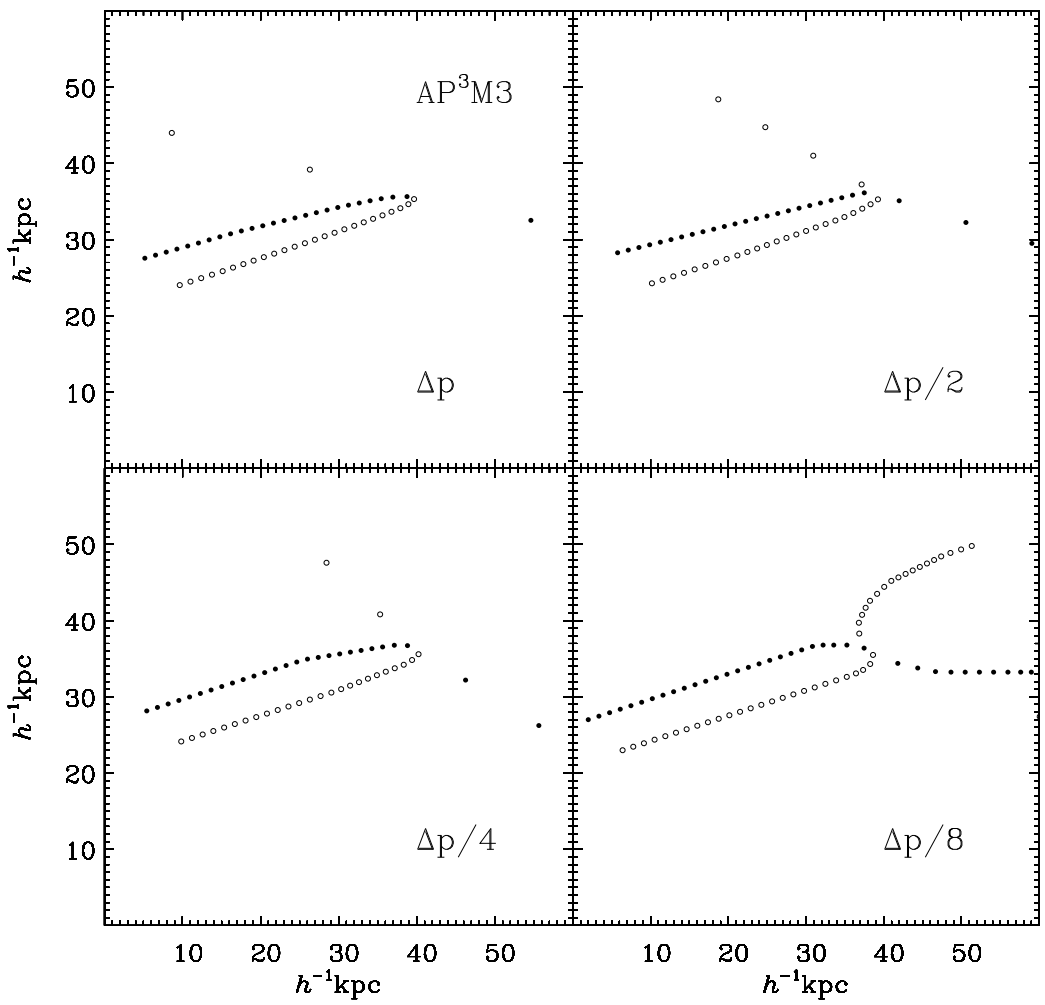


Abbildung 14: Teilchentrajektoren zweier Teilchen in der AP^{3}M3-Simulation. Die Schrittweite Δp (vgl. Abschnitt 4.1.2 und Abschnitt 3.1) wurde jeweils um den Faktor 2 reduziert, und es ist dementsprechend auch nur jeder 2., 4., 8. bzw. 16. Integrationsschritt gezeigt.

$$\frac{1}{2} m_p v^2 \stackrel{!}{=} \frac{G m_p^2}{s} \ . \tag{4.4}$$

Die Größe s ist hierbei der Abstand der beiden Teilchen, der sich nach einigen Umformungen und der Verwendung von konkreten Zahlenwerte wie folgt schreiben läßt:

$$s = 8.61 \cdot 10^{-2} h^{-1} \mathrm{kpc} \left(\frac{m_p}{10^8 h^{-1} M_\odot} \right) \left(\frac{v}{100 \ \mathrm{km/s}} \right)^{-2} \ . \tag{4.5}$$

Für die hier vorgestellten Simulationen gilt nun $m_p = 3.55 \cdot 10^9 h^{-1} M_\odot$, so daß s lediglich

von der Geschwindigkeit $v_{100} = v/(100\text{km/s})$ abhängt:

$$s = 3.05 \cdot v_{100}^{-2}\ h^{-1}\text{kpc}\ . \tag{4.6}$$

Falls nun der Abstand zweier Teilchen kleiner als s wird, dann kann es zu der in Abb.12 beobachteten Kollision kommen. Dies ist sicherlich nur der Fall, wenn der Wert des Softening-Parameters es zuläßt, daß sich die Teilchen dementsprechend nahe kommen. Die Schrittweite sollte nun so an den Softening-Parameter angepaßt werden, daß sich ein einzelnes Teilchen in einem Integrationsschritt nicht weiter als in etwa diesen Abstand bewegen kann. Die Geschwindigkeit der Teilchen (vor dem Stoß) beträgt in etwa $v_{100} \simeq 1 - 1.5$, so daß das Kriterium für eine Kollision in der AP^{3}M3-Simulation, bei der die Kraftauflösung $1.8h^{-1}$kpc beträgt, in jedem Fall erfüllt ist.

Um den Einfluß der Integrationsschrittweite zu verdeutlichen, ist in Abb.14 dieselbe Wechselwirkung wie in Abb.12 gezeigt. Diesmal unterscheiden sich die einzelnen Bilder jedoch dadurch, daß die Integrationsschrittweite Δp jeweils um den Faktor 2 reduziert wurde. Der Übersichtlichkeit halber ist dementsprechend auch nur jeder zweite, vierte, achte bzw. 16. Schritt abgebildet. Man entnimmt dieser Bildsequenz, daß erst bei einer Verachtfachung der Schrittzahl der unerwünschte Stoß in etwa so behandelt wird wie in der AP^{3}M1-Simulation (vgl. Abb.12).

Korrelationsfunktion der Dunklen Materie

Abschließend ist in Abb.15 die Korrelationsfunktion der Teilchenverteilung für einige ausgewählte Simulationen gezeigt. Die Korrelation geht herunter bis zu 5 h^{-1}kpc, was in etwa der Auflösung der einzelnen Durchläufe entspricht. Bis auf die PM1-Simulation, deren Kraftauflösung erheblich schlechter als die anderen Simulationen ist, stimmen die Korrelationsfunktionen aller anderen Rechnungen sehr gut überein. Die Amplitude der PM1-Korrelation knickt bei einer Skala ab, die ebenfalls in etwa der räumlichen Auflösung dieser Simulation entspricht. Alle anderen Durchläufe zeigen so gut wie keine nennenswerten Unterschiede. Lediglich auf sehr kleinen Skalen (nahe der räumlichen Auflösung) machen sich erneut die voneinander abweichenden Integrationsverfahren bemerkbar.

4.3 Eigenschaften der Halos

Bisher wurden die verschiedenen Simulationen nur an Hand von Abweichungen der Teilchentrajektoren untereinander verglichen. Nun geht es darum zu überprüfen, inwiefern sich physikalische Eigenschaften von Galaxienhaufen unterscheiden. Zur Identifikation von Teilchengruppen wurde das in Abschnitt 3.4.1 vorgestellte FOF-Verfahren unter Verwendung unterschiedlicher Linking-Längen ll benutzt. Die Verkleinerung der Linking-Länge um z.B. den Faktor 2 entspricht dabei einer Vergrößerung des Dichtekontrasts um den Faktor 8, da gilt:

$$\delta \propto \frac{1}{ll^3}\ . \tag{4.7}$$

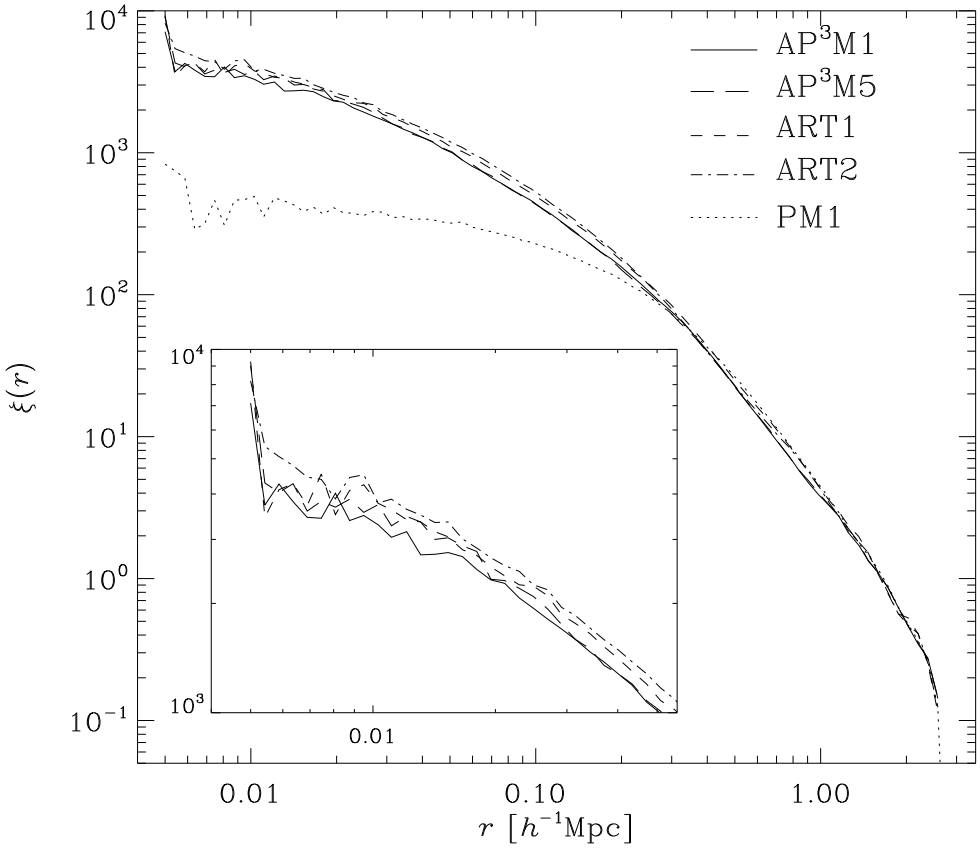


Abbildung 15: Korrelationsfunktion der Dunkle Materie-Teilchen für verschiedene Simulationen.

Bei der Verwendung sukzessiv kleiner werdender Linking-Längen beschränkt man sich somit ebenfalls auf immer dichtere Bereiche in den Simulationen und untersucht im Endeffekt die innersten Regionen bzw. Strukturen der Galaxienhaufen.

Masse

In Tabelle 5 sind die Anzahlen der Teilchengruppen aufgelistet, die in den einzelnen Durchläufen bei Verwendung der angegebenen Linking-Längen gefunden wurden. Dabei wurden lediglich Gruppen in Betracht gezogen, die aus wenigstens 25 Teilchen bestehen. Es zeigt sich auch hier eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulationen, wobei die Abweichung maximal 15% beträgt. Die beiden PM-Simulationen weisen jedoch deutlich zu wenig Haufen auf, was erneut der schlechten Auflösung zugeschrieben werden kann (s.u.). Ebenso finden sich in der AP^{3}M3-Simulation erheblich zu wenig Objekte (besonders im Fall $l = 0.05$), was darauf zurückgeführt werden kann, daß die Innenbereiche von Teilchengruppen durch den zu kleinen Wert des Softening-Parameters durch viele enge

Tabelle 5: Anzahl der Teilchengruppen für unterschiedliche Linking-Längen. Es wurden nur Objekte mit mehr als 25 Teilchen berücksichtigt.

Simulation	$ll = 0.2$	$ll = 0.1$	$ll = 0.05$
AP^3M5	388	292	162
AP^3M1	377	264	160
AP^3M4	340	221	110
AP^3M2	365	251	122
AP^3M3	332	215	87
PM1	214	150	50
PM2	208	155	49
ART1	359	291	161
ART2	383	297	169

Stöße 'ausgeschmiert' werden. Die Verwendung einer kleinen Linking-Länge kann in den anderen Simulationen zu einer Aufteilung des Haufens in die einzelnen Unterstrukturen führen, wobei im AP^3M3-Durchlauf hingegen auf Grund der 'Verschmierung' durch die Teilchenkollisionen erneut nur ein Objekt gefunden wird.

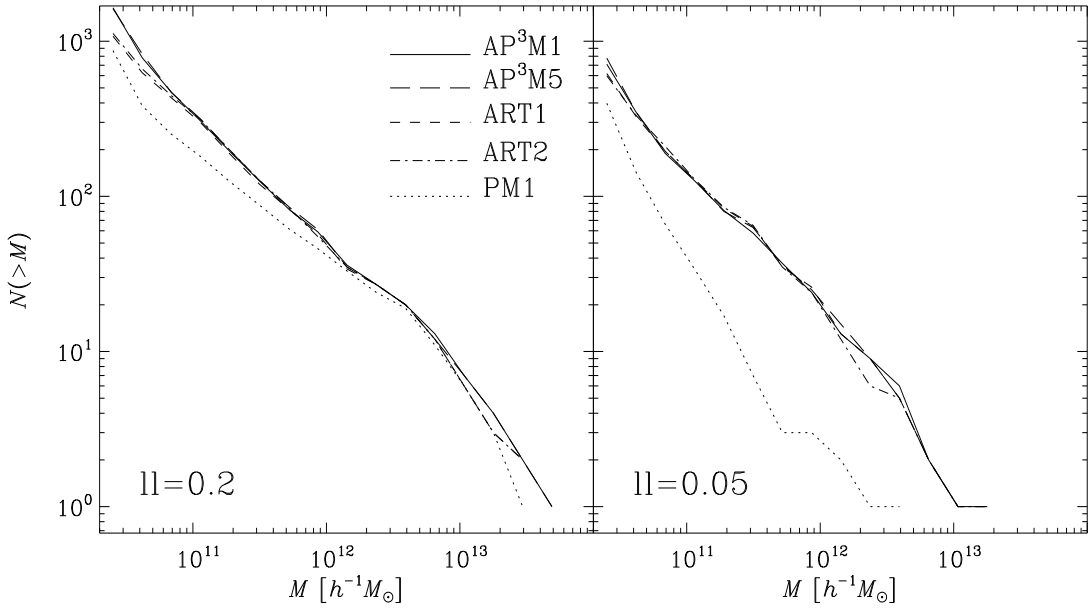


Abbildung 16: Kumulative Massenfunktion einiger ausgewählter Simulationen für die Linking-Längen $ll = 0.2$ und $ll = 0.05$.

Die Frage nach der Häufigkeit von Galaxienhaufen einer bestimmten Masse M läßt sich am besten durch die Berechnung der Massenfunktion analysieren, auf deren physikali-

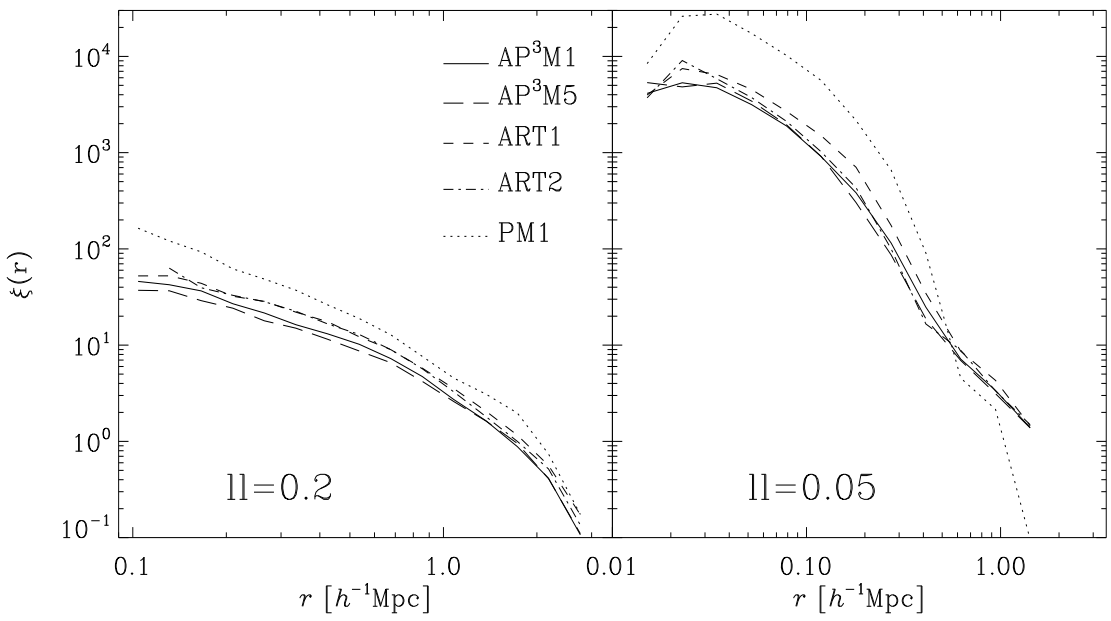


Abbildung 17: Korrelationsfunktion einiger ausgewählter Simulationen für die Linking-Längen $ll = 0.2$ und $ll = 0.05$.

sche Bedeutung in Abschnitt 5.2.2 noch näher eingegangen wird. In Abb.16 sind die kumulativen Funktionen $N(> M)$ zum Zeitpunkt $z = 0$ aufgetragen, welche die Anzahl identifizierter Objekte N mit einer Masse $> M$ angeben. Alle Funktionen stimmen so gut überein, daß sie sich nur schwer unterscheiden lassen, d.h. in allen Durchläufen wird annähernd die gleiche Anzahl an Haufen mit einer festen Masse M gefunden (vgl. Tabelle 5). Und selbst bei Verwendung einer Linking-Länge $ll = 0.05$, was einer Restriktion auf die Zentralbereiche von Galaxienhaufen entspricht, sind keinerlei gravierende Differenzen zu erkennen. Lediglich die PM1-Simulation liegt erneut außen vor, die zwar annähernd die gleiche Zahl an massereichen Haufen liefert, aber weder bei bei der Restriktion auf überdichte Gebiete noch bei massearmen Systemen in der Lage ist, die Werte der anderen Simulationen zu reproduzieren. Wie schon in Abb.10 deutlich zu erkennen ist, können solche kleinen Teilchengruppen auf Grund der schlechten räumlichen Auflösung auch gar nicht erst gebildet werden.

Korrelation der Teilchengruppen

Als nächstes stellt sich nun die Frage, ob die Galaxienhaufen, die nach Abb.16 und Tabelle 5 annähernd dieselben Massen aufweisen, auch an denselben Stellen der Simulationsbox zu finden sind. Aus diesem Grund wurde die Korrelationsfunktion von Teilchengruppen mit wenigstens 25 Teilchen berechnet, die in Abb.17 für dieselben Durchläufe wie in Abb.16 abgebildet ist. Und auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung, die den Rückschluß zuläßt, daß die *relative* Position der Haufen unabhängig von der

Kraftauflösung bzw. der Anzahl der verwendeten Integrationsschritte ist, auch wenn die *absoluten* Positionen der Objekte voneinander abweichen (vgl. Abb.10). Und wieder fällt die Sonderstellung der PM1-Simulation auf, deren stärkere Amplitude dadurch erklärt werden kann, daß insgesamt weniger Gruppen identifiziert wurden (Biasing-Phänomen, vgl. Tabelle 5 und Abschnitt 5.2.2).

Materieinhalt

Es wurde in Abschnitt 4.2 gezeigt, daß es wenig Sinn macht, Einzel-Trajektoren *innerhalb* von Teilchengruppen verschiedener Durchläufe miteinander zu vergleichen (vgl. Abb.11). Allerdings kann man überprüfen, ob eine Gruppe in der einen Simulation aus denselben Teilchen wie in einer anderen aufgebaut ist. Zu diesem Zweck müssen in beiden Durchläufen korrespondiere Objekte herausgesucht werden. Da man in Abb.10 gesehen hat, daß die Zentren eventuell leicht gegeneinander verschoben sein können, wurde dazu kein geometrisches Kriterium verwendet; diejenigen Galaxienhaufen werden als 'gleich' angesehen, welche die meiste Anzahl an 'gleichen' Teilchen aufweisen. Die Identität eines Teilchens ist dabei durch seinen (eindeutigen) Index gegeben.

In Abb.18 erkennt man, daß der überwiegende Anteil der Gesamtmasse in der Simulationen in Teilchengruppen enthalten ist, die aus annähernd denselben Teilchen aufgebaut sind. Alle Verteilungen haben ihr Maximum bei ca. 85%, was bedeutet, daß die korrespondierenden Objekte zu 85% aus denselben Teilchen bestehen. Die beiden ART-Durchläufe stimmen sogar im Materieinhalt der Haufen noch besser überein, und die Verteilung hat ihr Maximum bei ca. 95%. Für den Vergleich unterschiedlicher Codes ist das Maximum allerdings breiter, was sich erneut darauf zurückführen läßt, daß Teilchen(-trajektoren) innerhalb von Galaxienhaufen im einzelnen doch nicht zu einem quantitativen Vergleich herangezogen werden sollten. In dieser Abbildung wurden erneut nur Gruppen mit wenigstens 25 Teilchen in Betracht gezogen.

Geschwindigkeitsdisperion

In dem nun folgenden Unterabschnitt sollen die Geschwindigkeitsdispersionen 'gleicher' Teilchengruppen in unterschiedlichen Simulationen miteinander verglichen werden. Die Identifikation dieser Objekte ist wieder nach dem im letzten Unterabschnitt beschriebenen Verfahren der 'meisten-gemeinsamen-Teilchen' erfolgt. Da schon aus Abb.18 deutlich hervorging, daß die Haufen aus nahezu denselben Teilchen aufgebaut sind, erwartet man nun auch eine gute Übereinstimmung bei den Geschwindigkeitsdispersionen. In Abb.19 wurden diesmal allerdings nur Haufen mit wenigstens 50 Teilchen berücksichtigt, und die wenigen Ausreißer, die vom linearen Verhalten $\sigma_{v,\mathrm{sim}_1} = \sigma_{v,\mathrm{sim}_2}$ abweichen, lassen sich auf das FOF-Identifikationsverfahren zurückführen. Sie erklären sich dadurch, daß die FOF-Methode bei Anwendung auf die eine Simulation *einen* Haufen findet, der im anderen Durchlauf als *zwei* getrennte Objekte identifiziert wird, deren Geschwindigkeitsdispersionen im einzelnen kleiner sind als die des einen Haufens. Dies beruht auf dem Problem, daß das FOF-Verfahren nicht in der Lage ist, zwei über eine schmale 'Brücke' von Teilchen verbundene Gruppen auseinanderzuhalten. Allerdings handelt es sich in dabei nur

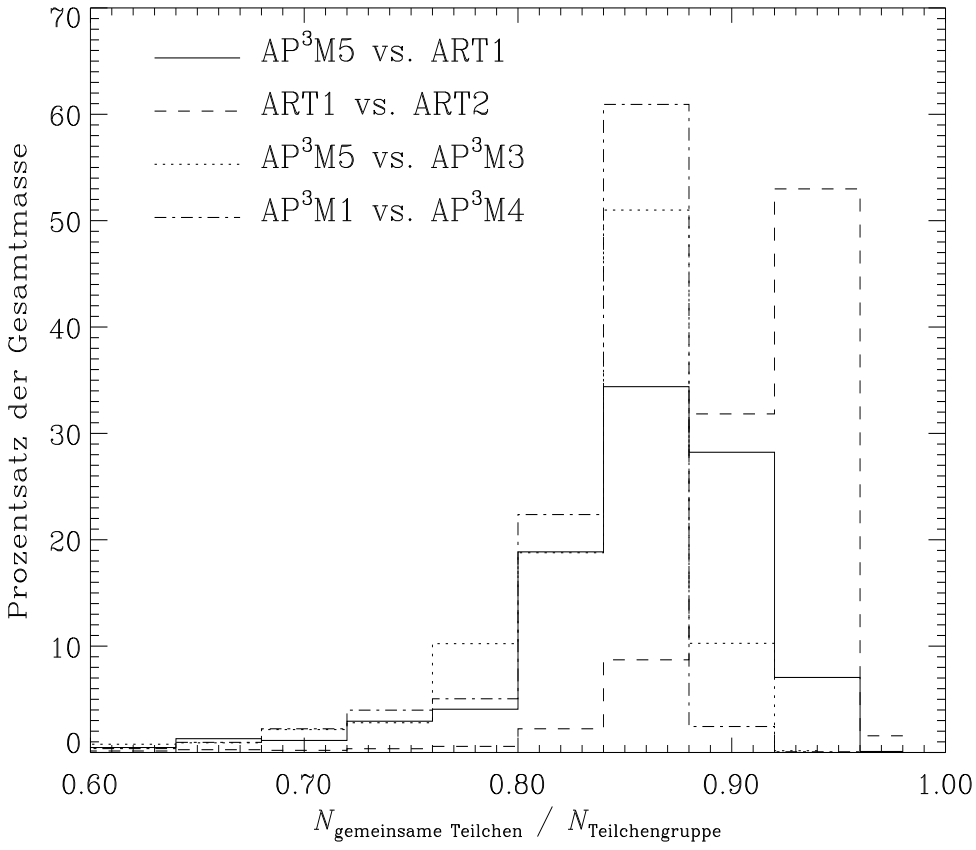


Abbildung 18: Prozentsatz der Gesamtmasse, die in Haufen enthalten ist, welche in verschiedenen Simulationen eine bestimmte Menge an gemeinsamen Teilchen aufweisen.

um eine kleine Anzahl von Einzelfällen, so daß man auch bei dieser Auswertung wieder eine sehr gute Übereinstimmung der einzelnen Durchläufe erhält.

Masse – Geschwindigkeitsdisperion

Bisher wurden Masse und Geschwindigkeitsdisperion korrespondierender Teilchengruppen (in unterschiedlichen Simulationen) für sich genommen miteinander verglichen. Für gravitativ gebundene Objekte erwartet man jedoch eine starke Korrelation der beiden Größen σ_v und M, wenn man davon ausgeht, daß die Teilchengruppe als ein isothermes, annähernd sphärisch-symmetrisches Objekt im Virialgleichgewicht mit einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung angesehen werden kann. Dieser Annahme liegt die Beobachtung flacher Rotationskurven von Spiralgalaxien zugrunde, die mit dem Dichteprofil $\rho(r) \propto 1/r^2$ einer isothermen Sphäre erklärt werden können und auch für Galaxien(haufen) in numerischen Simulationen beobachtet werden (Barnes & Efstathiou 1987,

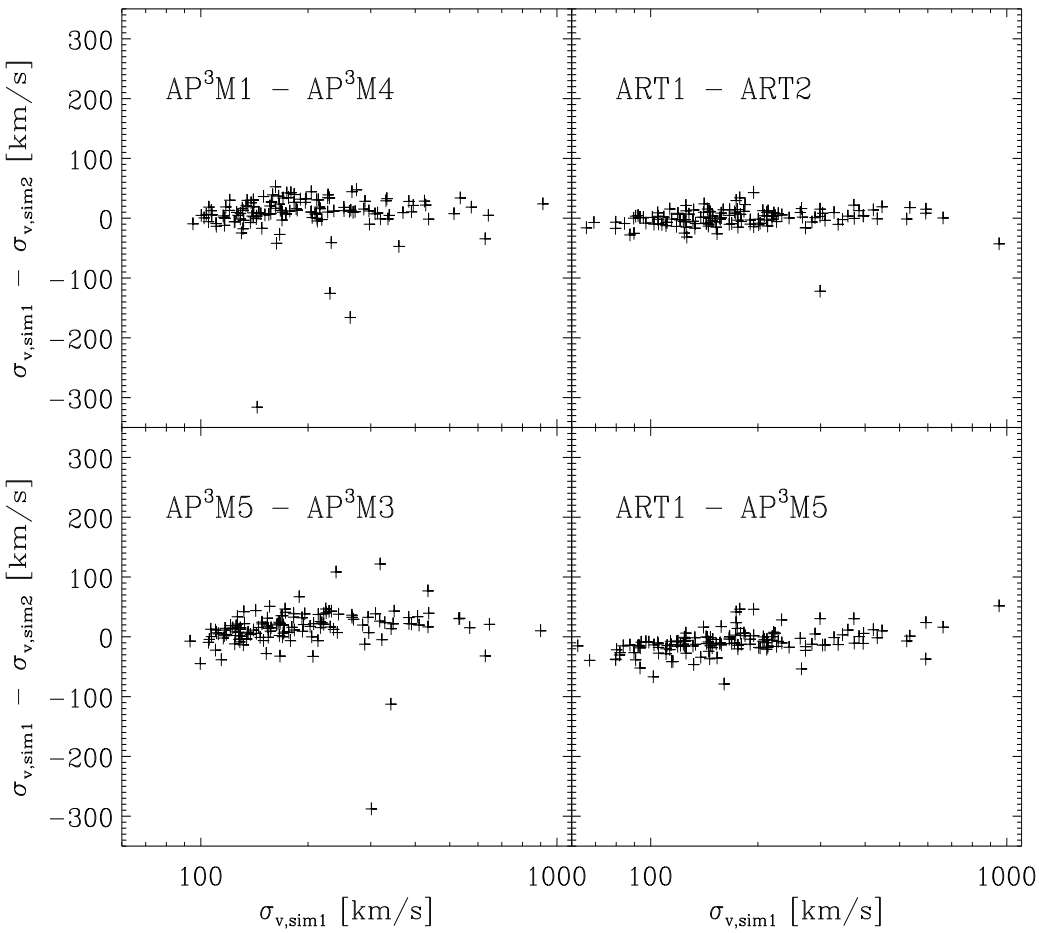


Abbildung 19: Korrelation der Geschwindigkeitsdispersionen korrespondierender Teilchengruppen in unterschiedlichen Simulationen.

Frenk et al. 1988, Warren et al. 1992, Tissera & Dominguez-Tenreiro 1998). Zusätzlich muß davon ausgegangen werden, daß der Rand dieser Sphäre $R_{\rm vir}$ bei einem Wert konstanter Dichte in die umgebende Materie übergeht, was für das verwendete FOF-Identifikationsverfahren sicherlich der Fall ist. Mit diesen Annahmen erhält man:

$$
\begin{aligned}
M_{\rm vir} &\propto \rho R_{\rm vir}^3 && \text{(sphärisch-symmetrische Kugel mit 'festem' Rand)}\\
v_{\rm rot} &\propto M/r && \text{(Virialsatz)}\\
\sigma_v &\propto v_{\rm rot} && \text{(isotrope Geschwindigkeitsverteilung)}\\
\rho &\propto 1/r^2 \Rightarrow M(r) \propto r && \text{(isotherme Sphäre)}
\end{aligned}
$$

Die Kombination dieser Gleichungen im Hinblick auf die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsdispersion σ_v von der Gesamtmasse $M_{\rm vir}$

$$\sigma_v^2 \propto v_{\rm rot}^2 \propto M/r = M_{\rm vir}/R_{\rm vir} \propto M_{\rm vir}/M_{\rm vir}^{1/3} \tag{4.8}$$

führt dann zu der Beziehung:

$$\sigma_v \propto M^{1/3} \ , \tag{4.9}$$

wobei für die Masse $M_{\rm vir}$ kurz M geschrieben wurde.

In Abb.20 ist dieser Zusammenhang für alle Teilchengruppen mit wenigstens 50 Teilchen in den Simulationen ART1, AP^{3}M5 und PM1 aufgezeigt. Die Beziehung (4.9) wird von der überwiegenden Mehrheit der Haufen erfüllt, auch wenn man für massearme Gruppen einige Objekte mit einer zu hohen Geschwindigkeitsdispersion im Vergleich zur Masse beobachtet. Die 50 massivsten Gruppen wurden zur Anpassung an ein Potenzgesetz $\sigma_v \propto M^\alpha$ verwendet, wobei man für ART1 und AP^{3}M1 einen Exponenten $\alpha = 0.33$ erhält. Die Anpassung an die Beziehung für die PM1-Simulation liefert in der doppelt-logarithmischen Abbildung eine Steigung $\alpha = 0.4$. Daran zeigt sich, daß das PM-Verfahren nicht in der Lage ist, die kleinskaligen Geschwindigkeiten korrekt zu berechnen; die Geschwindigkeitsdispersionen werden um ca. 20% unterschätzt, was letztendlich zu der in Abb.20 beobachteten Beziehung führt.

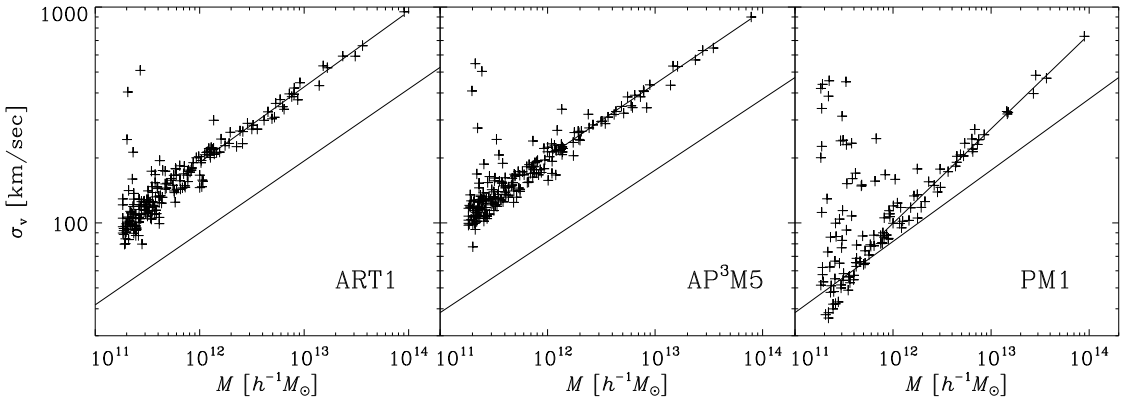


Abbildung 20: Korrelation zwischen Geschwindigkeitsdispersion und Masse. Die durchgezogenen Linien dienen lediglich dem Vergleich und haben in dieser doppelt-logarithmischen Abbildung die Steigung 1/3. Die anderen Linien entstammen einer Anpassung der 50 massereichsten Teilchengruppen an ein Potenzgesetz $\sigma_v \propto M^\alpha$.

4.4 Minimum-Spanning-Tree (MST)

Die Minimum-Spanning-Tree-Analyse ist in gewisser mit dem FOF-Verfahren zu vergleichen, allerdings sind in ihr die Informationen aller möglichen Linking-Längen enthalten. Es handelt sich hierbei um einen Graph, der alle Teilchen verbindet und minimale Länge

hat. Nach diesem Schema ergibt sich eine Anordnung von N Teilchen mit $N-1$ Verbindungslinien. Wird dieses Verbindungsschema bei einem bestimmten Abstand 'aufgebrochen', so erhält man dieselbe Information wie bei einer FOF-Analyse mit einer diesem Abstand entsprechenden Linking-Länge.

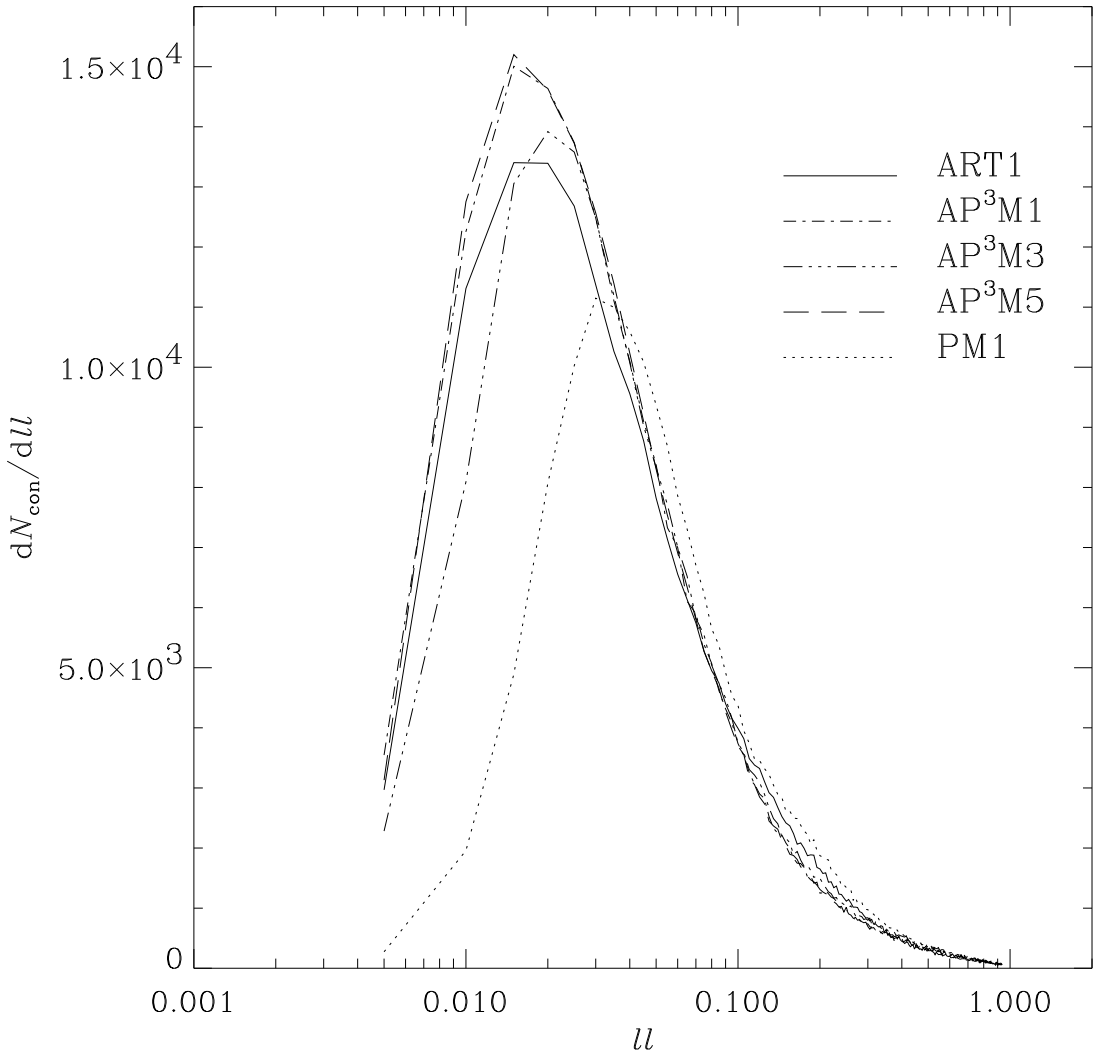


Abbildung 21: Anzahl der Verbindungen $N_{\rm con}$ pro Linking-Längen-Intervall $\Delta ll = 0.005$ in Abhängigkeit der Linking-Länge ll für einige ausgewählte Simulationen.

In Abb.21 ist die Anzahl der Verbindungen $N_{\rm con}$ pro Linking-Längen-Intervall $\Delta ll = 0.005$ gegen die Linking-Länge ll selbst aufgetragen. Man erkennt, daß die Verteilungen für ART1, AP^{3}M1 und AP^{3}M5 ihr Maximum bei einer Linking-Länge von $ll \simeq 0.015$ haben, im Gegensatz zur PM1-Simulation, bei der das Maximum zu einer größeren Linking-Länge

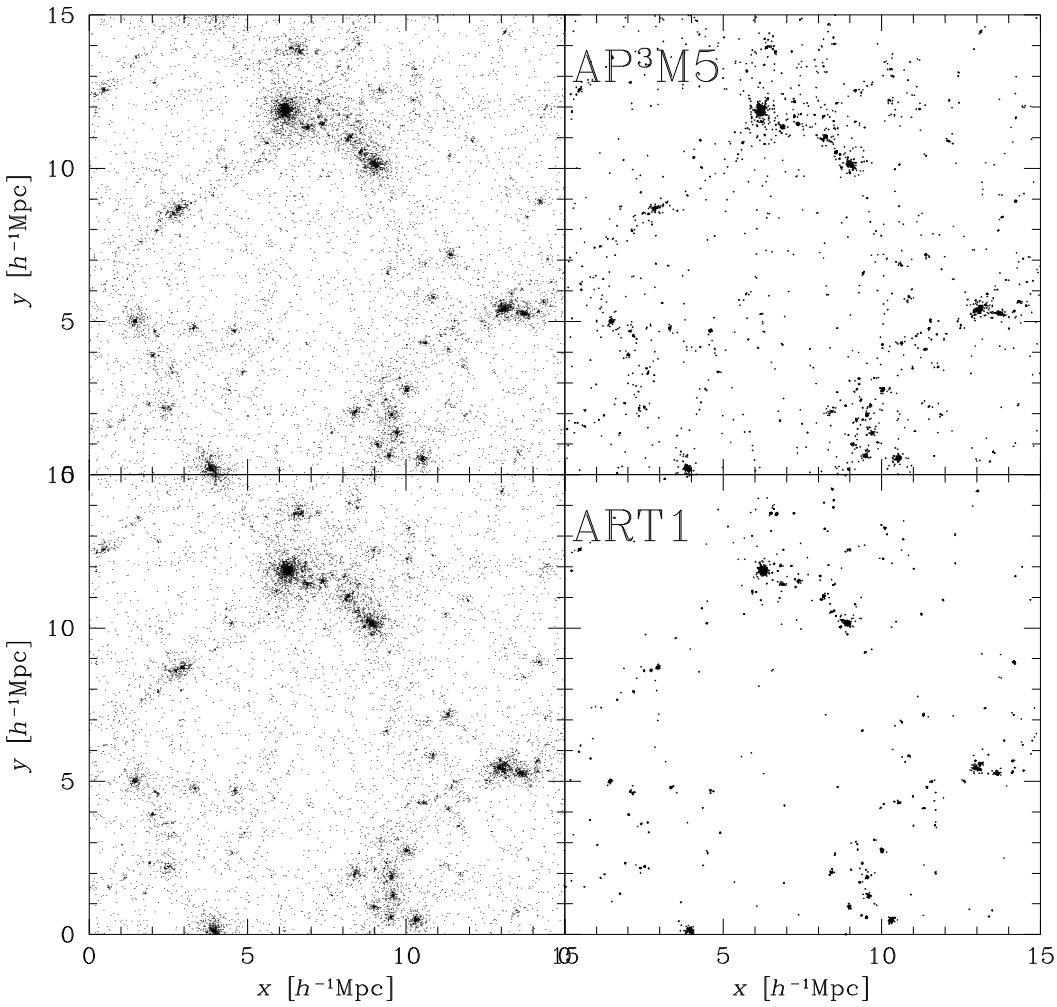


Abbildung 22: Projektion der Teilchen in die xy-Ebene für AP^{3}M5 (oben) und ART1 (unten). In der linken Hälfte sind 5% aller Teilchen, in der rechten lediglich die Doubletts und Tripletts einer FOF-Analyse mit $ll = 0.015$ gezeigt (ebenfalls in xy-Projektion).

$ll \simeq 0.035$ hin verschoben ist. Dies läßt sich darauf zurückführen, daß sowohl der ART- als auch der AP^{3}M-Code in der Lage ist, kleinere Entfernungen als das PM-Verfahren auflösen. Somit erhält man zwangsläufig mehr Verbindungen mit geringem Abstand. Die Lage des Maximums hängt allerdings nur geringfügig von den in diesem Kapitel verwendeten räumlichen Auflösungen (vgl. Tabelle 3) ab. Die Verbesserung der Kraftauflösung um einen Faktor 32 (ART1 gegenüber PM1) hat lediglich eine Verschiebung des Maximums um einen Faktor 2 zur Folge. Aus diesem Grund ist auch zwischen den Kurven für AP^{3}M1 und AP^{3}M5, die lediglich um einen Faktor 2 in der Auflösung voneinander abweichen, kein Unterschied sichtbar. Eine Vergrößerung des Integrationsschrittes führt ebenfalls zu

einer Verschiebung des Maximums in den Bereich größerer Abstände, da in diesem Fall die Zweier- bzw. Dreier-Paare durch enge Stöße zerstört werden (vgl. Abb.12). Die unverhältnismäßig hohe Kraftauflösung bei der AP^{3}M3-Simulation in Zusammenhang mit einer zu großen Schrittweite weist ein Maximum der MST-Kurve zwischen AP^{3}M1 und PM1 auf.

Die Amplitude der MST-Kurven ist durch die absolute Anzahl von Zweier- und Dreier-Paaren bestimmt, die im folgenden auch als Doubletts und Tripletts bezeichnet werden. Der AP^{3}M-Code findet in unterdichten Gebieten, begründet durch den PP-Anteil bei der Bestimmung der Kraft, eine große Anzahl von Doubletts und Tripletts, wohingegen beim ART-Code in diesen Regionen das Kriterium zur Verfeinerung nicht erfüllt ist und die Berechnung der gegenseitigen Wechselwirkung dem PM-Bild in Abb.12 gleichkommt. Für z.B. AP^{3}M5 findet man 3618 Doubletts und 558 Tripletts bei Verwendung einer Linking-Länge von $ll = 0.015$ und für ART1 nur 2753 Doubletts und 466 Tripletts. Um dieses Ergebnis anschaulich zu untermauern, ist in Abb.22 zum einen eine xy-Projektion der AP^{3}M5 (oben) und ART1-Simulation (unten) mit 5% aller Teilchen abgebildet (linke Hälfte), und zum anderen zwei Bilder (rechte Hälfte) gezeigt, in denen alle Doubletts und Tripletts (ebenfalls in Projektion) für eine FOF-Analyse mit der Linking-Länge $ll = 0.015$ abgebildet sind. Der Wert $ll = 0.015$ entspricht in etwa dem Maximum der MST-Kurven (vgl. Abb.21), und man kann deutlich erkennen, daß in der ART1-Simulation erheblich weniger Doubletts bzw. Tripletts in den unterdichten Gebieten zu finden sind, so wie es auch durch die Amplitude der MST-Kurven bestätigt wird. Das entspricht auch genau der Erwartung, da der ART-Code in diesen Regionen die ursprüngliche Auflösung der Kraft beibehalten hat und dort somit keine Zweier- oder Dreier-Objekte ausbildet werden können. Diese Handhabung verhindert zum anderen aber auch, daß es in diesen Regionen zu engen Stößen kommt, wie sie z.B. in der AP^{3}M3-Simulation beobachtet werden.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zum einen zwei unterschiedliche N-Body-Codes miteinander verglichen, und zum anderen die Ergebnisse bei Variation der technischen Parameter untersucht, nämlich der Kraftauflösung und der Integrationsschrittweite. Als eine dritte Vergleichsmöglichkeit bzw. zur Verdeutlichung der Notwendigkeit hoher räumlicher Auflösung wurde der AP^{3}M-Code ebenfalls als reiner PM-Code verwendet. Die Vergleichssimulationen basieren dabei auf einem COBE-normierten SCDM-Modell mit 64^3 Teilchen in einer 15 h^{-1}Mpc großen Box. Im großen und ganzen stellt man eine sehr gute Übereinstimmung von Simulationen derselben Startverteilung mit voneinander abweichenden Integrationsverfahren fest (vgl. Abb.10), und die Verwendung des Kreuz-Korrelationskoeffizienten deutet erst bei Glättung des Dichtefeldes ab einer Skala, die der Auflösungsgrenze nahe kommt ($< 100h^{-1}$kpc), auf Unterschiede hin. Direkte Abweichungen in den Teilchenpositionen weisen ihr Maximum innerhalb von Galaxienhaufen auf (Bereiche hoher Dichte), da dort die Einzel-Trajektoren chaotisch und nicht mehr vergleichbar sind (vgl. Abb.11). Die hohen Unterschiede für Vergleiche mit dem AP^{3}M3-Modell führten zu der Erkenntnis, daß eine zu kleine Wahl des Softening-Parameters bei fehlender Abstimmung mit der Integrationsschrittweite zu unerwünschten Zweier-Stößen

in unterdichten Gebieten führen kann (vgl. Abb.11, Abb.12 und Abb.14). Solch ein Phänomen ist eine direkte Konsequenz der direkten Teilchen-Teilchen-Kraft und wird deshalb in einem reinen Gitter-Code (ART und PM) nicht beobachtet. Auch bei der Untersuchung von FOF-Gruppen konnten nur wenige markante Unterschiede festgestellt werden. Die Haufen sind aus nahezu denselben Teilchen aufgebaut (vgl. Abb.18), und auch die Korrelationsfunktion dieser Objekte ist nahezu identisch (vgl. Abb.17). Lediglich bei der Korrelation der Geschwindigkeitsdispersionen konnten einige 'Ausreißer' gefunden werden, die sich jedoch auf das FOF-Identifikationsschema zurückführen lassen. Bei all diesen Vergleichsmethoden zeigten die Durchläufe, die mit dem PM-Code gerechnet wurden, daß eine hohe räumliche Auflösung zum Erzielen physikalisch sinnvoller Ergebnisse unbedingt notwendig ist, da in diesem Fall keine verläßlichen bzw. vergleichbaren Ergebnisse gewonnen wurden.

Kapitel 5

Galaxienhaufen in Simulationen

Die Entstehung, die inneren Eigenschaften sowie die räumliche Verteilung von Galaxiengruppen und Galaxienhaufen ist eng verbunden mit dem zugrunde liegenden kosmologischen Modell. In diesem Kapitel werden numerische Simulationen verschiedener Varianten des CDM-Modells mit jeweils unterschiedlichen kosmologischen Parametern untersucht und vor allem relaxierte Objekte von Verschmelzungsprozessen mit Hilfe des Virialtheorems unterschieden. Solche Merger-Ereignisse ereignen sich dabei bevorzugt in den tiefen Potentialtöpfen, d.h. in den überdichten Gebieten, und sie sind ein wichtiges Merkmal des Strukturbildungsprozesses. Eine Konsequenz dieses Phänomens besteht in einer stärkeren Korrelation der nicht-virialisierten Haufen im Vergleich zu den relaxierten Systemen. Eine ähnliche Beobachtung macht man für die leuchtkraftstärksten IRAS Galaxien, welche ebenfalls eine stärkere räumliche Korrelation aufweisen (Gao 1993) und mit derzeit ablaufenden Verschmelzungen von Galaxien identifiziert werden können (Sanders & Mirabel 1996). Weiterhin macht sich der Prozeß der Verschmelzung zweier (oder mehr) Galaxienhaufen durch stärkere Abweichungen von der Kugelsymmetrie der resultierenden Systeme bemerkbar, als es bei den virialisierten Gruppen der Fall ist.

Einen weiteren Hinweis auf solche Ereignisse bietet auch die Analyse von Unterstrukturen in Galaxienhaufen, da sich die unvollständige Virialisierung u.a. in dem Auftreten von Strukturen innerhalb der Objekte widerspiegelt. Ebenso erwartet man bei der quantitativen Analyse der Häufigkeit solcher Strukturen eine Modellabhängigkeit feststellen zu können, da in offenen kosmologischen Modellen $\Omega_0 < 1$ die Entstehung von Galaxienhaufen zu einem früheren Zeitpunkt zum Erliegen kommt; den Objekten steht somit mehr Zeit zur Ausbildung eines Gleichgewichtszustands zur Verfügung, was sich durch weniger stark ausgeprägte Unterstrukturen bemerkbar machen sollte. Die Häufigkeit von Unterstrukturen stellt somit eine Möglichkeit dar, einen Hinweis auf die Gesamtmaterie im Universum Ω_0, zu erhalten (Richstone et al. 1992, Bartelmann et al. 1993, Kauffmann & White 1993 und Lacey & Cole 1994).

Nach einer kurzen Einleitung zur Bedeutung von Galaxienhaufen für die Kosmologie soll die Entstehung und Entwicklung dieser Objekte innerhalb der großräumigen Struktur des Universums mit Hilfe von numerischen Simulationen untersucht werden. Daran schließt sich die Auswertung der Simulationen in Hinblick auf eine Quantifizierung von Unterstrukturen in Teilchengruppen an.

5.1 Kosmologische Bedeutung von Galaxienhaufen

Galaxien gehören meist Systemen an, die durch die wechselseitige Gravitationsanziehung ihrer Mitglieder zusammengehalten werden. Wir finden reiche Haufen mit mehreren Tausend Galaxien und kleinere Gruppen bis herunter zu Doppelgalaxien. Die vielleicht wichtigsten Beobachtungsbefunde in der Kosmologie stammen aus den Untersuchungen der großräumigen Struktur des Universums, sowie der größten, gravitativ gebundenen Systeme: der Galaxienhaufen. Mit Hilfe von Großteleskopen können wir Galaxien und ihre räumliche Verteilung um uns herum bis zurück in eine Zeit untersuchen, zu der das Universum etwa halb so alt war wie heute. Eines der Ziele in der Kosmologie ist es, die Entstehung und die Entwicklung der mit Hilfe von Himmelsdurchmusterungen sichtbar werdenden Strukturen zu verstehen. Es ist allgemein anerkannt, daß die Gravitationsinstabilität für die Entstehung der großräumigen Struktur des Universums verantwortlich ist. Verbindet man dies mit dem CDM-Modell erhält man das Bild des hierarchischen Anwachsen der Strukturen, welches durch vielzählige Galaxienkataloge seine Bestätigung findet. Galaxienhaufen sind die größten gravitativ gebundenen Objekte, die man heutzutage am Himmel finden kann. Erst vor kurzer Zeit (im kosmischen Maßstab) sind diese riesigen Objekte aus Galaxien und Galaxiengruppen entstanden, und sie wachsen beständig durch Prozesse wie Merging oder Akkretion, verursacht durch sie umgebende Materie. Diese (Super-)Haufen enstehen nicht zufällig im Raum; sie bilden sich an den seltenen hohen Dichtemaxima des primordialen Dichte-Fluktuationsfeld. Und genau das ist der Grund, weshalb sie eine so große Bedeutung für die Kosmologie haben, da diese Ausbildung im Modell der hierarchischen Strukturentstehung ungefähr zum heutigen Zeitpunkt geschieht. Somit haben nichtlineare Effekte, die man bei der Galaxien- und Sternentstehung versucht in den Griff zu bekommen, noch nicht Überhand gewonnen, und man kann aus dem Formationsprozeß der Haufen sehr viel über die Entstehung von Strukturen im Universum lernen. Die Masse und die Häufigkeit dieser Objekte geben uns zusätzlich einen Hinweis auf die Stärke dieser anfänglichen Dichteschwankungen im frühen Universum. Darüberhinaus zeigen numerische Simulationen und der Vergleich mit Beobachtungen, daß die Unterstrukturen von Galaxienhaufen einen Rückschluß auf den Dichteparameter Ω_0 zulassen.

Da diese Haufen über Verschmelzungsphasen und Akkretion ständig in Kontakt mit ihrer Umgebung stehen, erwarten wir, diesen Formationsprozeß auch heutzutage gut beobachten zu können. Röntgenbeobachtungen von Galaxienhaufen bestätigen diese Annahme und liefern darüberhinaus eine Vielfalt von Morphologien dieser Objekte, die unter anderem auch dazu verwendet werden können, zwischen unterschiedlichen kosmologischen Modellen zu unterscheiden (Mohr et al. 1995). In einem Universum mit einem geringen Wert für Ω_0 kommt die Strukturbildung früher zum Stillstand als vergleichsweise in Modellen mit einem größeren Wert für Ω_0. Andererseits zeigen neuere Simulationen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zwischen internen Strukturen in verschiedenen kosmologischen Modellen, gemessen an dem mittleren Dichteprofil der Haufen, wenn man den Verlauf in Einheiten einer typischen Skala wie z.B. des Virialradius angibt (Jing et al. 1995, Navarro et al. 1997, Thomas et al. 1998). In der nachfolgenden Analyse werden nun Galaxienhaufen in Interaktion mit der umgebenden Materie untersucht, da genau

solche Prozesse (wie z.B. der ständige Einfall von Materie auf den Haufen) die inneren Eigenschaften in entscheidender Weise beeinflussen können.

5.2 Entstehung und Entwicklung von Galaxienhaufen

5.2.1 Virial-Theorem für Teilchengruppen

Wie schon in Abschnitt 3.4 ausführlich erläutert, wurde zur Identifikation von Teilchengruppen in den numerischen Simulationen das Friends-Of-Friends Verfahren angewandt. Einer der Vorzüge dieser Methode liegt darin, daß keine geometrische Form bevorzugt behandelt wird. Allerdings kann man sich auch nicht sicher sein, daß es sich bei den identifizierten Objekten um physikalische Systeme handelt. Aus diesem Grund wurde das Virialtheorem herangezogen, welches für jeden identifizierten Galaxienhaufen individuell überprüft wurde.

Stabile mechanische Systeme, deren Potential sphärisch-symmetrisch ist und somit nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ abhängt, unterliegen im Zeitmittel einer Beziehung zwischen der kinetischen und der potentiellen Energie in der Form:

$$|E_{\text{pot}}| = 2 \cdot E_{\text{kin}} \,. \tag{5.1}$$

Andererseits kann dieser Zusammenhang auch dazu benutzt werden, um die Stabilität eines solchen System zu überprüfen; ist der Virialsatz (5.1) erfüllt, so kann davon ausgegangen werden, daß sich das System in einem relaxierten Zustand befindet. Es wird in diesem Fall als virialisiert bzw. gebunden bezeichnet.

Da die untersuchten Systeme meist sehr viele Teilchen in einem Objekt vereinen, mußte eine Methode gefunden werden, die potentielle Energie solcher großen Teilchenansammlungen effizient und zeitsparend berechnen zu können. Für kleinere Gruppen wird selbstverständlich die direkte Summation verwendet:

$$|E_{\text{pot,sum}}| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} G \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|} \,. \tag{5.2}$$

Handelt es sich allerdings um ein Objekt mit mehr als ca. 10.000 Teilchen, so ist diese Methode zu zeitaufwendig. Ein adäquates Näherungsverfahren stellt dabei die Approximation von Spitzer (1969) dar:

$$|E_{\text{pot,approx}}| \;\simeq\; 0.4 \;\; G \;\; \frac{M^2}{r_h} \,. \tag{5.3}$$

Hierbei ist r_h der Radius des System, der eine Kugel beschreibt, welche die Hälfte der Gesamtmasse des Systems umschließt. In Abb.23 soll verdeutlicht werden, daß diese Approximation eine gute Übereinstimmung mit der direkten Summation aufweist: Die potentielle Energie, berechnet mittels Gl.(5.3), ist gegen den entsprechenden Wert aus Gl.(5.2) in Form eines Streudiagramms aufgetragen.

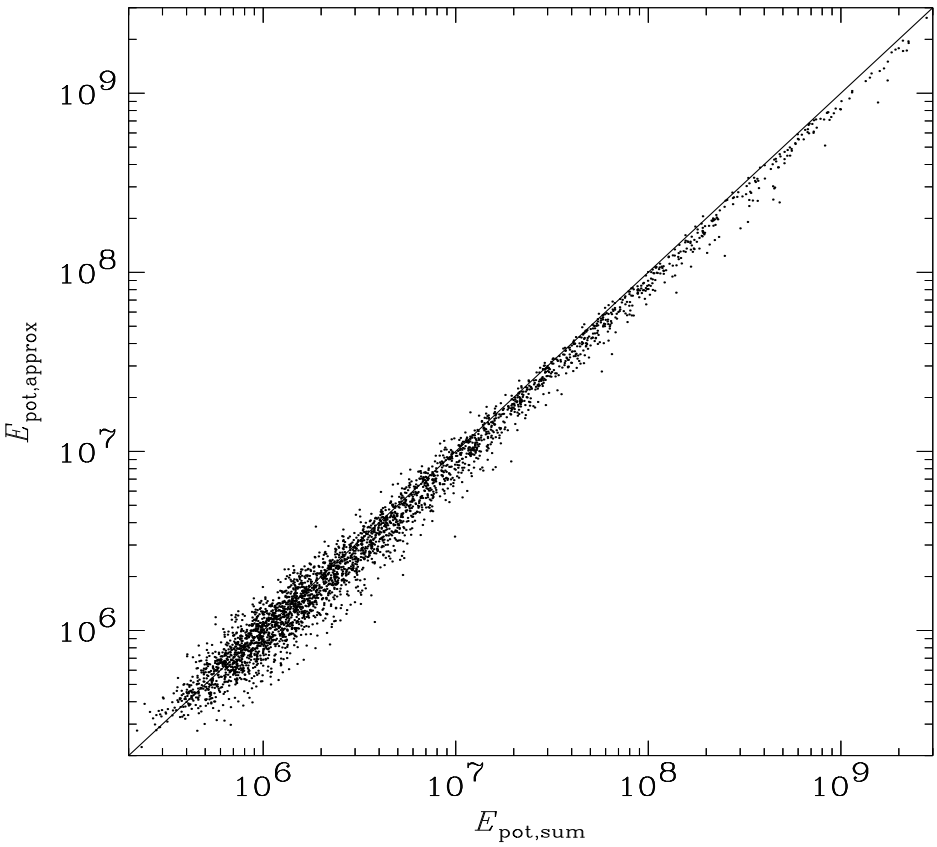


Abbildung 23: Approximierte potentielle Energie gegen einen entsprechenden Wert, der über die direkte Summation berechnet wurde (SCDM-Modell, $z = 0$).

Anhand dieser Graphik ist deutlich zu erkennen, daß sich die Näherung, beschrieben durch Gl.(5.3), mit angemessener Genauigkeit zur Berechnung der potentiellen Energie heranziehen läßt. Für massereiche Objekte wird der wahre Wert der potentiellen Energie bei Verwendung der Näherungsformel jedoch unterschätzt

$$|E_{\mathrm{pot,approx}}| \lesssim |E_{\mathrm{pot,sum}}| \,, \tag{5.4}$$

was durch eine Korrektur des Faktors 0.4 ausgeglichen werden kann. Dies war in den vorliegenden Fällen jedoch nicht notwendig, da die Galaxienhaufen in den hier vorgestellten Simulationen aus maximal 3.000 Teilchen aufgebaut sind und somit die direkte Summation zur Bestimmung der potentiellen Energie verwendet werden konnte.

Da alle Teilchen dieselbe Masse $m \equiv m_i$ haben, läßt sich die kinetische Energie einer Teilchengruppe in einfachster Art und Weise mit der Geschwindigkeitsdispersion des Objekts in Verbindung bringen:

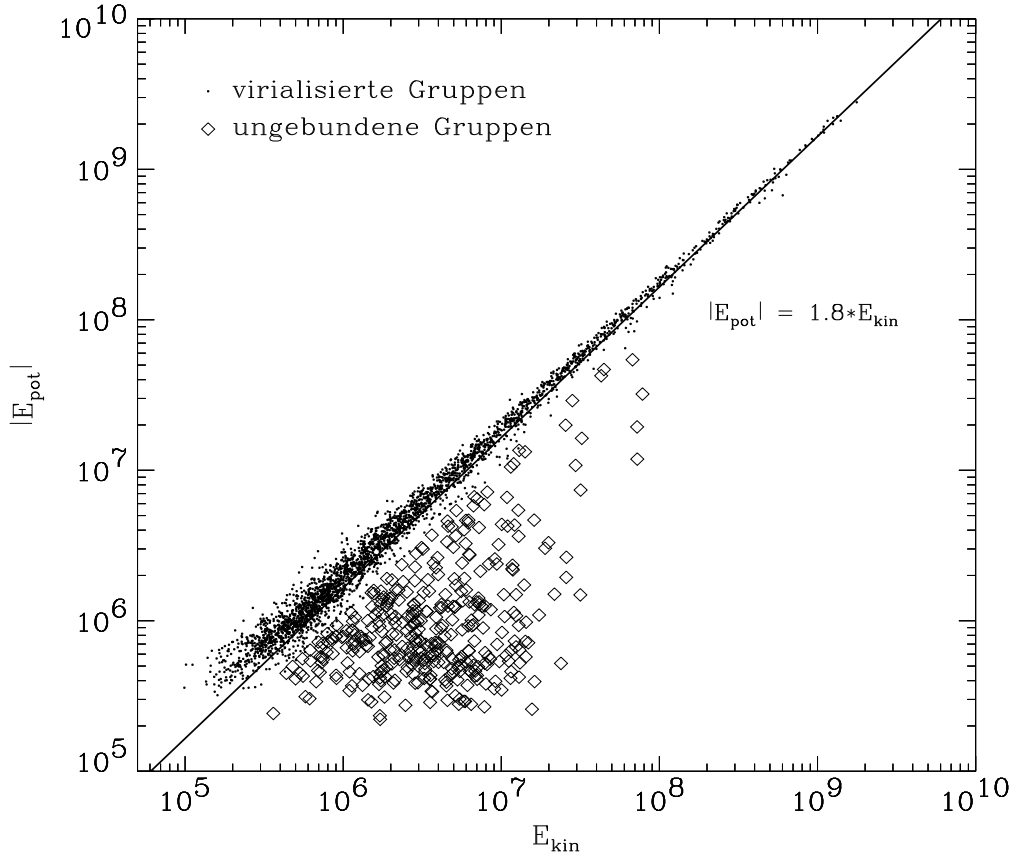


Abbildung 24: Virial Theorem für alle Haufen mit mehr als 25 Teilchen im SCDM-Modell ($z = 0$). Die Werte für $E_{\rm pot}$ und $E_{\rm kin}$ sind in willkürlichen Einheiten. Die durchgezogene Linie entspricht der Beziehung $|E_{\rm pot}| = 1.8 E_{\rm kin}$.

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v_i} - \vec{v_{\rm center}})^2 = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N}(\vec{v_i} - \vec{v_{\rm center}})^2 = \frac{1}{2} m N \sigma_v^2 \ . \tag{5.5}$$

In Abb.24 ist für das SCDM-Modell die Beziehung zwischen potentieller und kinetischer Energie aufgezeigt. Diese Abbildung ist repräsentativ für die anderen Modelle und ebenso für alle anderen Zeitpunkte der Analyse. Jeder einzelne Punkt dieses Streudiagramms steht für eine Teilchengruppe, deren potentielle und kinetische Energie bestimmt wurde. Man kann der Graphik entnehmen, daß eine lineare Beziehung für eine große Mehrheit der identifizierten Objekte erfüllt ist. Lediglich ein geringer Prozentsatz (vgl. Tabelle 6) weist eine zu hohe kinetische Energie im Vergleich zur potentiellen Energie auf. Es handelt sich hierbei um die 'Diamanten' unterhalb der linearen Beziehung $E_{\rm kin} = 1.8 E_{\rm pot}$.

Als erstes stellt sich nun die Frage, weshalb nicht direkt der Virialsatz $E_{\rm kin} = 2E_{\rm pot}$ aus der Graphik abzulesen ist. Das läßt sich relativ einfach erklären, wenn man berücksich-

Tabelle 6: Prozentsätze der nicht-virialisierten Teilchengruppen in den unterschiedlichen kosmologischen Modellen für verschiedene Rotverschiebungen.

	Rotverschiebung z					
Simulation	0	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0
SCDM	8 %	8 %	7 %	4 %	2 %	2 %
ΛCDM	3 %	3 %	4 %	4 %	2 %	2 %
OCDM1	3 %	4 %	4 %	4 %	5 %	50 %
OCDM2	2 %	2 %	1 %	3 %	2 %	2 %

Tabelle 7: Massengrenze bei der Analyse der Teilchengruppen. Der angegebene Wert entspricht 25 Teilchen.

Simulation	**SCDM**	**ΛCDM**	**OCDM1**	**OCDM2**
Massengrenze $[h^{-1}M_\odot]$	$2.8 \cdot 10^{13}$	$2.2 \cdot 10^{13}$	$2.2 \cdot 10^{13}$	$3.8 \cdot 10^{13}$

tigt, daß die großen Haufen einer ständigen Akkretion kleinerer Objekte bis herunter zu Einzelteilchen unterliegen. Diese Gruppen fallen mit einer hohen Geschwindigkeit auf den eigentlichen Haufen und führen somit zu einer Erhöhung der inneren Geschwindigkeitsdispersion; sie wirken auf das Objekt wie ein äußerer Druck (Cole & Lacey 1996). Mit dieser Erklärung läßt sich auch das Abknicken der Virialbeziehung für leichtere Haufen (geringe potentielle Energien) verstehen: die kleinen Objekte unterliegen diesem Effekt nicht so stark und erfüllen das Virialtheorem in seiner ursprünglichen Form. Je weiter man aber zu den massereichen Haufen geht, desto mehr muß man den eben erwähnten Effekt berücksichtigen und den 'Virialfaktor' nach unten korrigieren.

Als zweites kommt die Frage auf, weshalb es Systeme gibt, die den Virialsatz überhaupt nicht erfüllen. Diese Objekte werden im folgenden als nicht-virialisiert bzw. ungebunden bezeichnet und im Detail untersucht. In Tabelle 6 sind die Prozentsätze dieser Objekte für alle vier Modelle zu unterschiedlichen Zeiten angegeben. Es wurden dabei lediglich Gruppen mit mindestens 25 Teilchen berücksichtigt, wobei die dieser Anzahl entsprechende Masse in Tabelle 7 zu finden ist.

Es ist offensichtlich, daß im SCDM-Modell die meisten ungebundenen Objekte zu finden sind, da dieses Modell auf Grund der gewählten (COBE-)Normierung (vgl. Tabelle 1) am weitesten entwickelt ist. Es existieren in diesem Modell absolut gesehen sehr viele Galaxienhaufen, die einer starken Wechselwirkung mit der direkten Umgebung unterliegen. Der extrem hohe Wert für das OCDM1-Modell bei einer Rotverschiebung von $z = 2$ kann ebenfalls über die Normierung erklärt werden: Dieses Modell weist auf Grund des geringen Wertes für σ_8 sehr wenige Galaxienhaufen auf, wie sich noch später bei der Analyse der Massenfunktion zeigen wird. Eine genaue Untersuchung der identifizierten Objekte zeigt nun, daß bei der Rotverschiebung $z = 2$ lediglich zwei Objekte mit Hilfe des FOF-Algorithmus gefunden wurden; und eines dieser Objekte befindet sich nicht im Virialgleichgewicht.

5.2.2 Eigenschaften der (un-)gebundenen Haufen

Masse

Eine der fundamentalsten Eigenschaften eines Galaxienhaufens ist seine Masse M. Trotzdem kann man durch die Untersuchung dieser Größe (z.B. Entwicklung der Häufigkeitsverteilung) viel über den Entstehungs- und Entwicklungsprozeß von Galaxienhaufen und das zugrunde liegende kosmologische Modell lernen. Wie im Anhang A.6 gezeigt, wurde in den 70er Jahren von Press & Schechter ein theoretisches Modell entworfen, mit dessen Hilfe sich unter der Annahme eines Gaußschen Fluktuationsfelds und linearer Störungstheorie die Anzahldichte von Galaxienhaufen einer bestimmten Masse M zu beliebigen Zeitpunkten bestimmen läßt (Press & Schechter 1974):

$$\frac{dn}{dM}\,dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\overline{\rho}}{M}\,\frac{\delta_c}{\sigma_M}\,\left|\frac{d\ln\sigma_M}{d\ln M}\right|\,\exp(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2})\,\frac{dM}{M} \tag{5.6}$$

Zum Vergleich mit Beobachtungsdaten bzw. auch der Modelle untereinander verwendet man jedoch besser die integrierte (kumulative) Verteilungsfunktion:

$$n(>M) = \int_M^\infty \frac{dn}{dM}\,dM\ , \tag{5.7}$$

welche die Anzahldichte n der Objekte mit einer Masse größer als M angibt. Diese Funktion unterliegt weniger stark Fluktuationen, die u.a. durch das Einteilen der Massen der Objekte in diskrete Bins entstehen.

In Abb.25 sind die kumulativen Massenfunktionen $n(>M)$ der verschiedenen kosmologischen Modelle (Histogramme) im Vergleich zur Vorhersage der Theorie von Press & Schechter (vgl. Gl.(5.7), durchgezogene Linien) für $z = 0$ aufgetragen. Die Simulations-, sowie die Beobachtungsdaten (offene/geschlossene Punkte mit Fehlerbalken) wurden zusätzlich an eine Schechter-Funktion der Form

$$n(>M) = n_*\left(\frac{M}{M_*}\right)^{-p}\exp(-\frac{M}{M_*}) \tag{5.8}$$

angepaßt, die in der Abbildung als gestrichelte Linien gezeichnet sind und deren Parameter Tabelle 8 entnommen werden können.

Die Beobachtungsdaten gehen dabei auf eine Zusammenstellung von Bahcall & Cen (1993) zurück, in der sowohl optische als auch Röntgenbeobachtungen berücksichtigt wurden. Die Daten sind zusammengetragen aus Analysen des Abell Haufenkatalogs von Bahcall & Soneira (1983), Batuski et al. (1989), Postmann et al. (1992) und Peacock & West (1992) (geschlossene Kreise), Schätzungen der Haufendichte aus dem Edinburgh-Durham Cluster Catalog (EDCC, Lumsden et al. 1992) (offene Quadrate) und der Transformation der Röntgentemperaturfunktion, die aus EXOSAT und HEAO II Daten gewonnen wurde (Henry & Arnaud 1991, offene Diamanten). Kurz gesagt repräsentieren die offene Symbole Röntgendaten, und die geschlossenen Punkte sind aus optischen Beobachtungen gewonnen. Die Abbildung zeigt deutlich die Mängel der Modelle SCDM und OCDM1.

Tabelle 8: Parameter der kumulativen Massenfunktionen für die Anpassung an eine Schechter-Funktion Gl.(5.8). Der Wert für n_* ist in $10^{-5}h^3\mathrm{Mpc}^{-3}$ und M_* in $10^{14}\ h^{-1}M_\odot$ angegeben.

	n_*	M_*	p
SCDM	1.55	16.33	0.98
ΛCDM	0.57	5.74	1.21
OCDM1	2.74	0.75	1.53
OCDM2	1.52	6.31	1.11
Beobachtung	5.11 ± 2.1	1.46 ± 0.2	0.94 ± 0.2

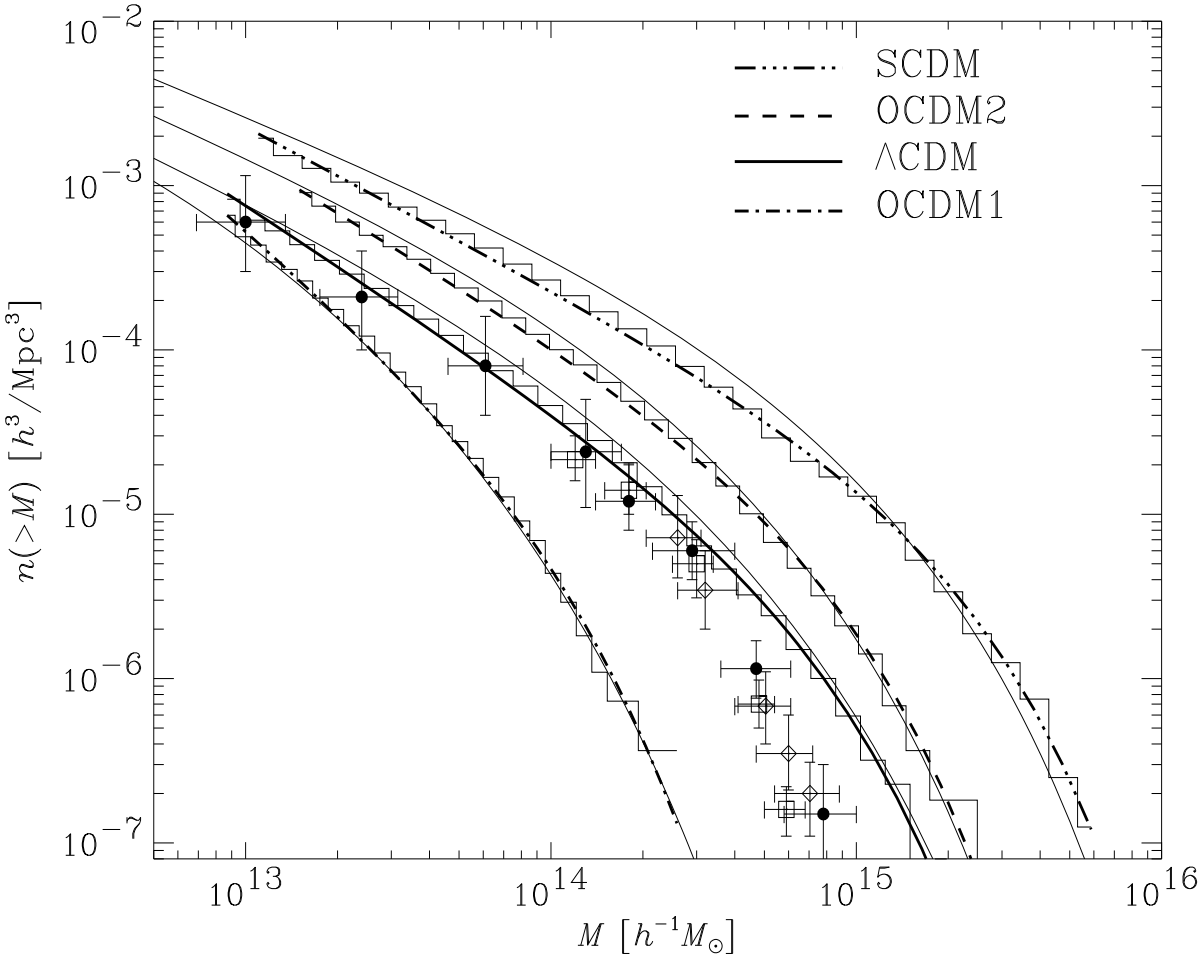


Abbildung 25: Massenfunktionen der kosmologischen Modelle (Histogramme bzw. an Histogramme gefittete Linien) im Vergleich zu Beobachtungsdaten (Punkte mit Fehlerbalken, vgl. Text) und der Press & Schechter Vorhersage (durchlaufende Linien) für $z = 0$.

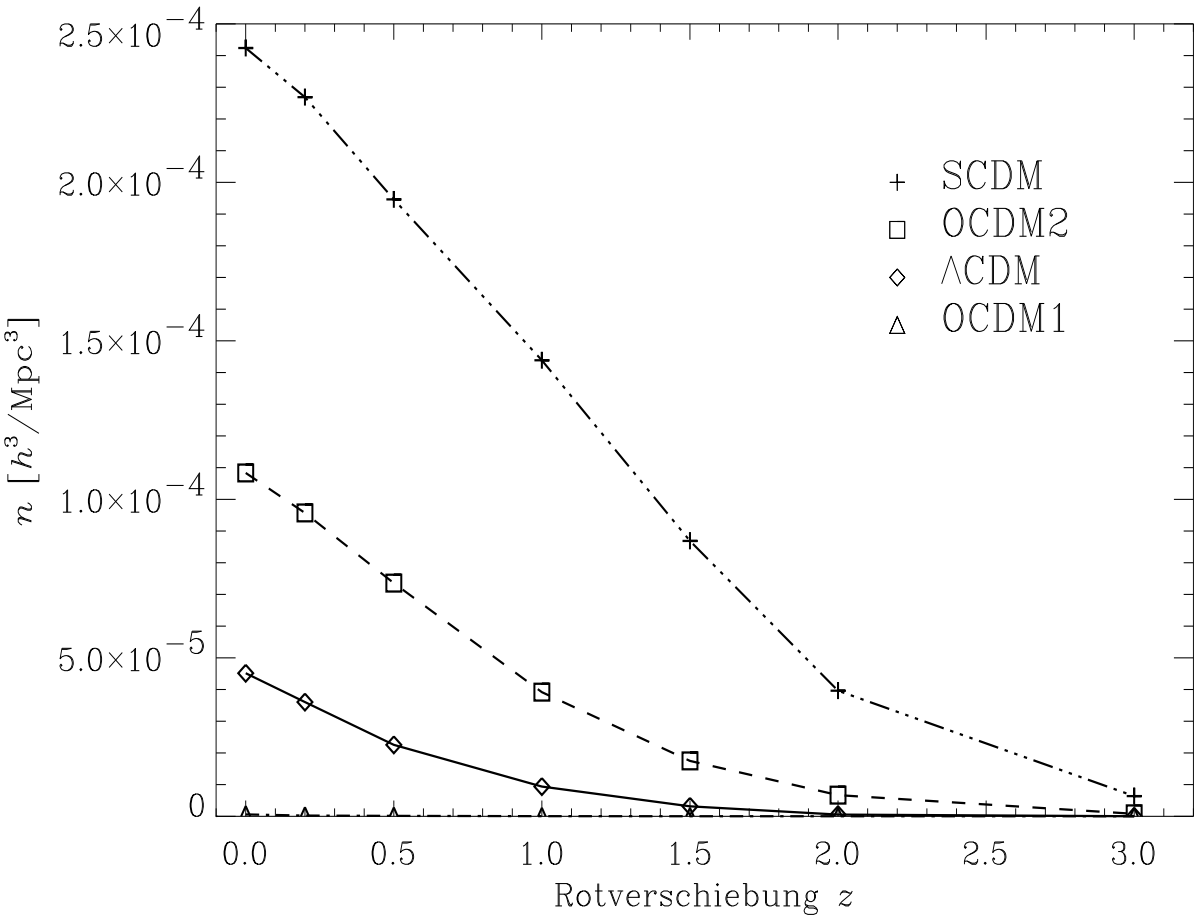


Abbildung 26: Entwicklung der Anzahldichte von Teilchengruppen mit einer Masse im Intervall $M \in [10^{14}h^{-1}\mathrm{M}_\odot\ ,10^{15}h^{-1}\mathrm{M}_\odot]$.

Beide sind nicht der Lage, die Beobachtungen der Häufigkeit massereicher Galaxienhaufen wiederzugeben. Beide Modelle versagen u.a. auch auf Grund der COBE-Normierung, da die Eingangspowerspektren, welche nach Gl.(A.41) und Gl.(A.40) im Anhang A.6 einen entscheidenden Einfluß auf die Massenfunktionen haben, eine zu hohe bzw. zu niedrige Amplitude im Vergleich zu Beobachtungen von Galaxienhaufen aufweisen (vgl. Gl.(5.9)).

Hingegen liefern alle aus den Simulationen bestimmten Massenfunktionen relativ gute Übereinstimmung mit der Vorhersage von Press & Schechter (Carlberg & Couchman 1989, Jain & Bertschinger 1994, Lacey & Cole 1994, Bond & Myers 1996), unabhängig vom kosmologischen Modell. Lediglich im Bereich massearmer Objekte kann eine Abweichung um einen Faktor von ca. 1.5 festgestellt werden, wie sie auch schon in anderen Arbeiten gefunden wurde (Gelb & Bertschinger 1994, Gross et al. 1998). Allerdings ist die Wahl des Parameters δ_c (sowie der Fensterfunktion $W_R(r)$, vgl. Anhang A.6) nicht eindeutig festgelegt, so daß in einigen Arbeiten vorgeschlagen wird, δ_c als freien Parame-

ter zu behandeln, der an die Massenfunktionen der Simulationen angepaßt werden muß (Ma & Bertschinger 1994, Klypin et al. 1995). Dieser Ansatz wird dadurch begründet, daß der Kollaps 'realer' Objekte nicht sphärisch-symmetrisch verläuft, so wie es bei der Ableitung des Wertes $\delta_c = 1.686$ vorausgesetzt wurde. Geht man von einem ellipsoiden Modell aus, so gelangt man zu einem Wert $\delta_c < 1.686$ (Monaco 1995), wie es durch ebensolche Anpassung bestätigt wird.

Wie schon in Abschnitt 3.1 erwähnt, kann man jedoch erst bei der Berücksichtigung der Entwicklung der Massenfunktion genauere Aussagen über das kosmologische Modell machen, da dann die Entartung zwischen den Größen Ω_0 und σ_8 aufbricht (Eke et al. 1996b, Bahcall et al. 1997, Eke et al. 1998):

$$\sigma_8 \sqrt{\Omega_0} \simeq 0.5 \,. \tag{5.9}$$

In Abb.26 ist die Entwicklung der Häufigkeit von Galaxienhaufen im Massenbereich von 10^{14} bis 10^{15} $h^{-1}M_\odot$ angegeben. Man erkennt deutliche Unterschiede in der Entwicklung, auch wenn die hier vorgestellten Simulationen auf Grund der gewählten Parameter nicht in der Lage sind, die Aufhebung der Entartung zu illustrieren. Die Entwicklung für OCDM1 ist in der Abbildung deshalb nicht klar zu erkennen, da in diesem Modell nur sehr wenige Galaxienhaufen in dem untersuchten Massenintervall gebildet werden (vgl. Abb.25).

Masse – Geschwindigkeitsdispersion

In diesem Abschnitt soll erneut der Zusammenhang zwischen der Masse und Geschwindigkeitsdispersion eines Galaxienhaufens näher untersucht werden. In Abschnitt 4.3 wurde gezeigt, daß es für isotherme, sphärisch-symmetrische Teilchengruppen einen engen Zusammenhang zwischen σ_v und M gibt (vgl. Gl.(4.9), S.61).

In Abb.27 ist für jede FOF-Gruppe die Geschwindigkeitsdispersion σ_v gegen die Masse M des Systems aufgetragen. Man kann deutlich erkennen, daß die Beziehung $\sigma_v \propto M^{1/3}$ sehr gut wiedergegeben wird. Es ist repräsentativ für alle Simulationen nur der Zusammenhang für das ΛCDM-Modell aufgezeigt. Ebenso wie Cole & Lacey (1996) es beobachtet haben, streuen die massearmen Haufen stärker. Die durchgezogene Linie ist durch eine Anpassung an die Skalierungsrelation $\sigma_v = M^\alpha$ bestimmt worden, bei welcher der Exponent α variiert wurde. In allen Modellen wurde der theoretisch bestimmte Wert von 1/3 reproduziert. Man kann aus Abb.27 ebenso ablesen, daß der Großteil der ungebundenen Haufen am unteren Massenende mit teilweise sehr großen Geschwindigkeitsdispersionen zu finden ist. Cole & Lacey (1996) argumentieren, daß der 'Schwanz' der Gruppen mit $\sigma_v \gg M^{1/3}$ von Objekten gebildet wird, die eigentlich zu einer übergeordneten (größeren) virialisierten Struktur gehören. Wenn allerdings die Analyse für eine größere Linking-Länge ll wiederholt wird, was einer Identifikation eben solcher Objekte entspricht, so beobachtet man ebenfalls (Abb.27, unteres Bild) ungebundene Objekte im Bereich $\sigma_v \gg M^{1/3}$. Das trifft ebenfalls wieder auf alle Modelle zu, so daß lediglich das Resultat für das ΛCDM-Modell angeben ist. Es muß also noch einen anderen Grund dafür geben, daß die Teilchengruppen als ungebunden identifiziert werden. Bei den massearmen Objekten wird es sich in erster Linie um Fehlidentifikationen des FOF-Algorithmus handeln: *zwei*

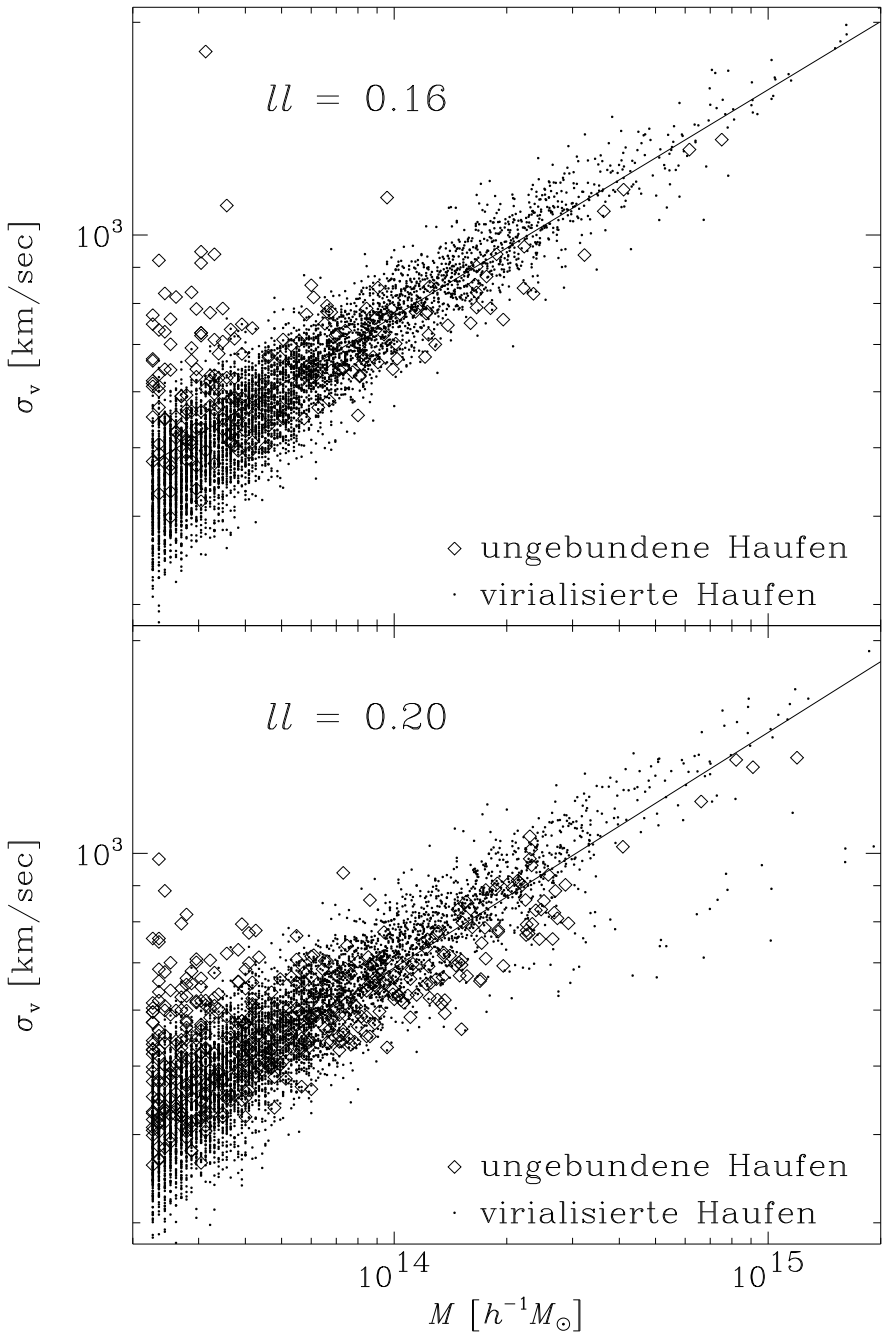


Abbildung 27: Korrelation zwischen Masse und Geschwindigkeitsdispersion der identifizierten Teilchengruppen, aufgeteilt in virialisierte und ungebundene Objekte (oben für eine Linking Länge von $ll = 0.16$, unten für $ll = 0.2$).

schnell aneinander vorbeifliegende kleine Einzelgruppen wurden zum Zeitpunkt der Analyse als *ein* Objekt identifiziert. Es muß allerdings auch darauf hingewiesen werden, daß für diesen Massenbereich die Auflösung der Simulationen nicht besonders gut ist. Die ungebunden Teilchengruppen, die *unterhalb* der theoretischen Vorhersage $\sigma_v \propto M^{1/3}$ liegen, sind jedoch von erheblich größerem Interesse: Sie stellen Systeme dar, die sich momentan in Zustand der Verschmelzung befinden und aus diesem Grund eine zu hohe Masse im Vergleich zur Geschwindigkeitsdispersion aufweisen. Im folgenden soll diese Behauptung mit Hilfe weitere Analysen gefestigt werden.

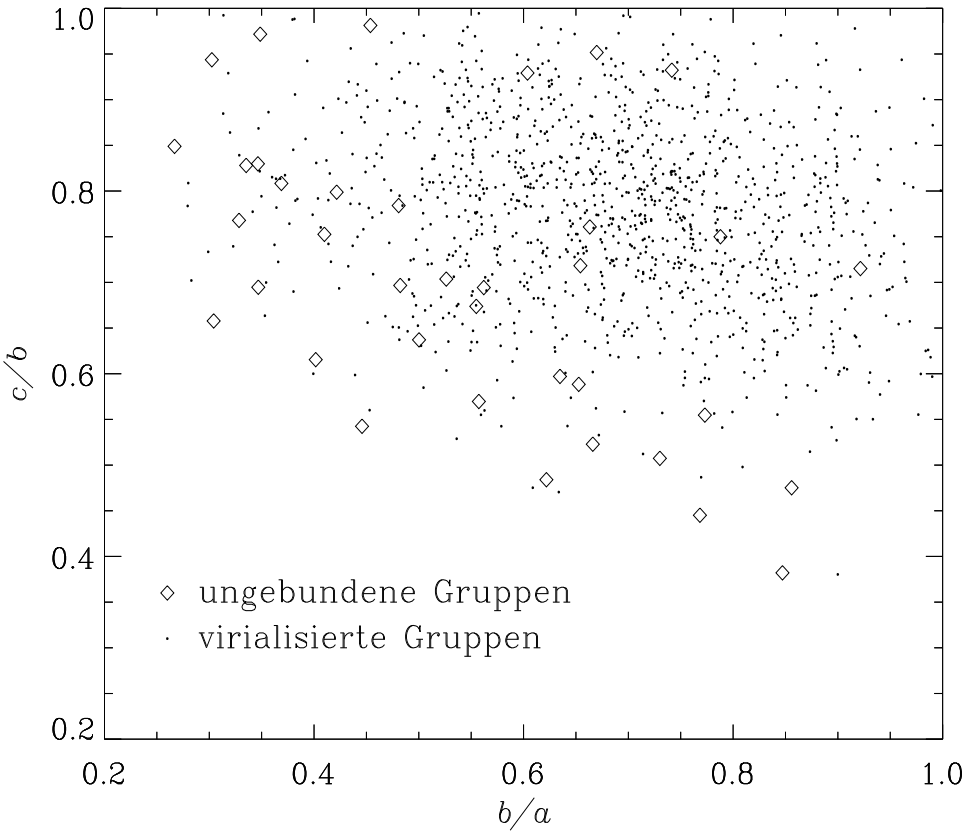


Abbildung 28: Achsenverhältnisse der Teilchengruppen im ΛCDM-Modell für $z = 0$.

Achsenverhältnisse

Untersucht man das Verhältnis der Hauptträgheitsachsen der Teilchengruppen, so kann man erwarten, für interaktive Systeme exzentrischere Formen zu beobachten als für relaxierte Systeme. Zu diesem Zweck wurden die Eigenwerte des Trägheitstensors jeder FOF-Gruppe berechnet und in die Reihenfolge $a > b > c$ gebracht. Es wird wieder

das ΛCDM stellvertretend für die anderen Modelle aufgezeigt, da die Ergebnisse keine starke Abhängigkeit von den kosmologischen Parametern zeigen. In Abb.28 ist das Verhältnis von c/b gegen b/a als Punktediagramm aufgetragen, wobei deutlich zwischen den virialisierten und ungebundenen Systemen unterschieden werden kann. Die virialisierten Objekte bevölkern den rechten oberen Teil des Streudiagramms und liefern ein mittleres Achsenverhältnis von 1:0.7:0.5, welches durch Untersuchungen am Modell der hierarchischen Strukturentstehung in anderen Arbeiten bestätigt wird (Frenk et al. 1988, Dubinsky 1992, Warren et al. 1992, Cole & Lacey 1996).

Im linken unteren Bereich hingegen findet man bevorzugt die nicht-virialisierten Systeme; diese Gruppen sind auf Grund von Gezeitenwirkungen in die Länge gezogen. Einige dieser Haufen weisen zusätzlich noch eine Ausdehnung in eine weitere Richtung auf, die durch einen nicht-zentralen Zusammenstoß der Vorläufer-Systeme erklärt werden kann. Wenn man für diese Systeme das mittlere Verhältnis der Achsen zueinander berechnet, so erhält man 1:0.4:0.3. Diese Halos sind abgeflachter und weichen stärker von der Kugelsymmetrie ab als die virialisierten Objekte.

Stoßparameter

Der nächste interessante Punkt in diesem Zusammenhang ist die Frage nach dem Stoßparameter bei der Verschmelzung von Galaxienhaufen. Wie die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts vermuten lassen, erwartet man bei ungebundenen Systemen nichtzentrale Stöße der Vorläufer, die dann zu den exzentrischen Formen des Verschmelzungsprodukt führen. Als erstes muß dazu die Definition eines Mergers festgelegt werden, da es nur für solche Ereignisse Sinn macht, einen Stoßparameter zu berechnen; selbstverständlich kann man für akkretierte Materie ebenfalls solch eine Größe definieren, aber der Prozeß der Akkretion hat keinen wesentlichen Einfluß auf die Virialisierung, da er nur eine kleine Korrektur des Virialsatzes erfordert (vgl. Abschnitt 5.2.1). In Abb.29 ist der Unterschied zwischen diesen beiden wichtigen Prozessen der hierarchischen Strukturbildung aufgezeigt. In der folgenden Analyse und Berechnung des Stoßparameters sind nur solche Ereignisse berücksichtigt, für die das Verhältnis der beiden größten Vorläufer mindestens $1:3$ beträgt. In allen anderen Fällen kann davon ausgegangen werden, daß der Einfall eines Objekts, welches erheblich leichter als der Galaxienhaufen ist, keinen Einfluß auf die Virialisierung des Systems hat.

In Tabelle 9 sind die Ergebnisse für Verschmelzungsprozesse zwischen den Rotverschiebungen von $z = 0.1$ nach $z = 0$ zu finden. Ebenso wie schon bei der Untersuchung der Achsenverhältnisse der Haufen wurden lediglich Gruppen mit mehr als 25 Teilchen berücksichtigt. Zum Zeitpunkt $z = 0$ wurden die virialisierten sowie die ungebundenen Gruppen identifiziert und jedes einzelne Objekt dann zur Rotverschiebung $z = 0.1$ zurückverfolgt. Konnten zu diesem Zeitpunkt zwei Vorläuferobjekte gefunden werden, die das in Abb.29 angegebene Kriterium erfüllen, so wurde die Gruppe nach dem Schema aus Abb.30 zur Berechnung des Stoßparameters herangezogen:

$$\vec{e}_{v,i} = \vec{v}_i/|\vec{v}_i|$$

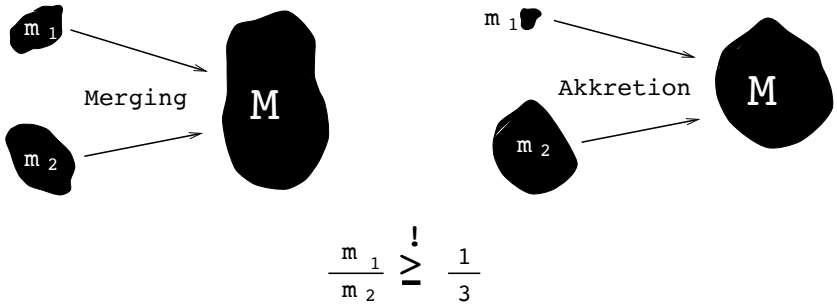


Abbildung 29: Unterschied zwischen einem Merger und Akkretion.

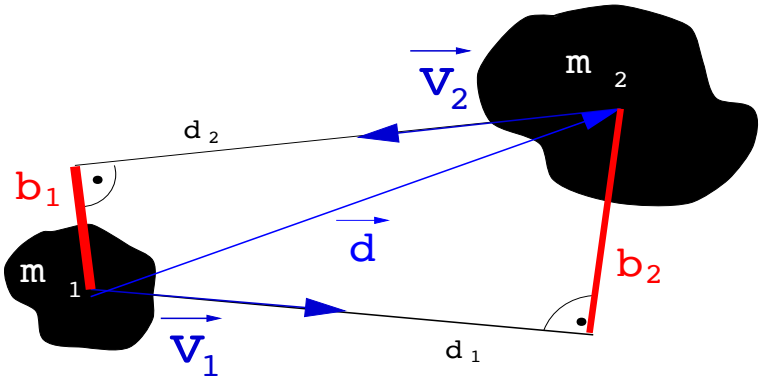


Abbildung 30: Skizze zur Erläuterung des Stoßparameters.

$$\begin{aligned} \vec{d}_i &= (\vec{d} \cdot \vec{e}_{v,i})\, \vec{e}_{v,i} \\ b_i &= |\vec{d} - \vec{d}_i| \qquad \text{mit } i = 1, 2\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar für den Stoßparameter b:

$$b = \frac{b_1 + b_2}{2}\,. \tag{5.10}$$

In Tabelle 9 findet man nun die für jedes Modell gemittelten Werte mit den dazugehörigen Schwankungen. In dieser Analyse ist das OCDM1-Modell vernachlässigt worden, da es auf Grund der COBE-Normierung nicht genügend Galaxienhaufen produziert (vgl. Abb.25), so daß eine Untersuchung der Verschmelzungseigenschaften solcher Objekte keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefern würde.

Man kann deutlich erkennen, daß für die nicht-virialisierten Systeme die Stoßparameter größer sind als für Gruppen, die als gebunden identifiziert worden sind. Dies bestätigt die Annahme, daß nicht-zentrale Stöße bevorzugt zu ungebundenen Objekten führen bzw.

Tabelle 9: Mittelwerte der Stoßparameter b (in $h^{-1}\mathrm{Mpc}$) aufgeteilt nach virialisierten und nicht-virialisierten Objekten.

	virialisierte Haufen	ungebundene Haufen
SCDM	0.92 ± 0.60	1.19 ± 0.59
ΛCDM	0.91 ± 0.45	1.18 ± 0.48
OCDM2	0.91 ± 0.48	1.26 ± 0.50

Tabelle 10: Mittelwerte der Aufprallgeschwindigkeiten $|\vec{v}_{\mathrm{hit}}|$ (in km/s) aufgeteilt nach virialisierten und nicht-virialisierten Objekten.

	virialisierte Haufen	ungebundene Haufen
SCDM	670 ± 500	900 ± 450
ΛCDM	560 ± 300	600 ± 280
OCDM2	640 ± 380	830 ± 350

daß es sich bei den ungebundenen Objekten um Teilchengruppen handelt, bei denen nicht genügend Zeit zur Ausbildung eines virialisierten Objektes vorhanden war.

Nach demselben Kriterium (vgl. Abb.29) wie für Tabelle 9 wurden ebenfalls die Stoßgeschwindigkeiten

$$|\vec{v}_{\mathrm{hit}}| = |\vec{v_1} - \vec{v_2}| \tag{5.11}$$

berechnet und die Ergebnisse sind in Tabelle 10 angegeben. Auch hier erkennt man den Trend dahin, daß die ungebundenen Systeme eine höhere relative Geschwindigkeit der beiden schwersten Vorläufer zueinander aufweisen.

Die Analyse der Stoßparameter zeigt somit deutlich, daß es sich bei den ungebundenen Teilchengruppen in erster Linie um das (nicht-zentrale) Verschmelzen zweier Einzel-Objekte handelt, bei denen die höheren Stoßparameter auch zu exzentrischeren Achsenverhältnissen führten (vgl. Abb.28).

Virialisierung

Wenn man jetzt davon ausgehen kann, daß es sich bei den nicht-virialisierten Objekten um aktive Verschmelzungsprozesse handelt, so stellt sich zwangsläufig die Frage, ob und wie schnell die Systeme relaxieren. Dieser Punkt soll im nun folgenden Abschnitt genauer untersucht werden. Zu diesem Zweck wurden zu verschiedenen Rotverschiebungen sämtliche ungebundenen Teilchengruppen identifiziert und dann in der Zeit nach vorne verfolgt. Wie Tabelle 11 zeigt, virialisiert eine erheblicher Prozentsatz der als ungebunden identifizierten Teilchengruppen innerhalb eines kurzen Rotverschiebungsintervalls. Das zeigt, daß die Zeit während der ein Objekt als 'ungebunden' in der Simulation auftaucht, nur von kurzer Dauer ist. Der auffallend niedrige Prozentsatz für das ΛCDM-Modell von $z = 0.2$ nach $z = 0.1$ läßt sich nach einer detaillierten Analyse ebenfalls erklären: Viele

Tabelle 11: Prozentsätze der ungebundenen Objekte, die im Rotverschiebungsintervall von $z = 0.2$ nach $z = 0.1$ bzw. $z = 0.1$ nach $z = 0.0$ virialisiert sind.

	$z = 0.2 \rightarrow z = 0.1$	$z = 0.1 \rightarrow z = 0.0$
SCDM	(74 ± 4) %	(63 ± 4) %
ΛCDM	(46 ± 6) %	(90 ± 5) %
OCDM2	(83 ± 7) %	(84 ± 7) %

der ungebundenen Objekte unterlagen während dieser Phase heftigen Wechselwirkungen mit der Umgebung und einige der bei der Rotverschiebung $z = 0.2$ vorhandenen ungebundenen Systeme existieren zu dem späteren Zeitpunkt $z = 0.1$ gar nicht mehr; sie wurden durch Gezeitenkräfte benachbarter Gruppen auseinandergerissen.

Ein anschauliches Beispiel für solch einen Verschmelzungsprozeß soll in Abb.44 (Ende von Kapitel 5, S.106) gezeigt werden. Es handelt sich hierbei um den schwersten ungebundenen Haufen im SCDM-Modell bei einer Rotverschiebung von $z = 0$. Die Masse dieses Objekts beträgt $M = 2.8 \cdot 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$. Für die Rotverschiebung $z = 0.1$ sind die beiden massivsten Vorläufer ($M_1 = 1.3 \cdot 10^{15}$, $M_2 = 1.1 \cdot 10^{15}$) gezeichnet, die beide für sich genommen ein virialisiertes System darstellen. Bei allen Bildern handelt es sich um die Projektion eines Würfels der Kantenlänge 5 h^{-1}Mpc in alle drei Ebenen, wobei nur die Teilchen der jeweiligen Objekte abgebildet sind. Die absolute Länge der eingezeichneten Geschwindigkeitsvektoren ist willkürlich; lediglich die relativen Längen zueinander sind von Bedeutung und sollen die Richtung des Zusammenpralls verdeutlichen. Eine entsprechende grafische Darstellung eines Mergers von $z = 0.2$ nach $z = 0.1$, bei dem sich zum Zeitpunkt $z = 0$ ein Virialgleichgewicht eingestellt hat, ist in Abb.45 gezeigt. Es handelt sich dabei um den massivsten ungebundenen Haufen zur Zeit $z = 0.1$ im SCDM-Modell in einer Box der Kantenlänge 4 h^{-1}Mpc. Der ungebundene Galaxienhaufen wurde sowohl in der Zeit nach vorn als auch zurück verfolgt. Um Projektionseffekte zu verringern, wurden die beiden Vorläufer in unterschiedlichen Farben dargestellt.

Korrelationsfunktion

Eine der grundlegendsten Anforderungen an ein kosmologisches Modell ist die Reproduktion der Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion in Form und Amplitude. Viele Jahre über war die Korrelationsfunktion die Standard-Methode zur Beschreibung der Klumpungseigenschaften von Galaxien und Galaxienhaufen. Schon im Jahr 1969 wurde gezeigt, daß sich die Korrelation von Galaxien als ein Potenzgesetz

$$\xi(r) = (r_0/r)^{\gamma} \tag{5.12}$$

schreiben läßt, wobei die Korrelationslänge $r_0 = 4.7$ Mpc beträgt und für den Exponenten $\gamma \simeq 1.8$ gilt (Totsuji & Kihara 1969). Und auch in frühen Arbeiten zu kosmologischen Vielteilchensimulationen war eines der Ziele, die Bestimmung der Entwicklung von $\xi(r)$ (Peebles & Groth 1976). Die Annahme, daß Galaxien nur an bestimmten Orten im Universum zu finden sind, und zwar an denen, wo die lokale Dichte einen kritischen Wert δ_c

überschreitet, führt zu einer Korrelation, die eine stärkere Amplitude im Vergleich zur Verteilung der Dunklen Materie aufweist (Kaiser 1984). Dieser Effekt legt die Einführung eines biasing[10]-Parameters nah:

$$\xi_{\rm cl}(r) = b^2(r)\ \xi_{\rm DM}(r)\ . \tag{5.13}$$

Auf dieses Phänomen soll in Abschnitt 6 noch genauer eingegangen werden, da dort eine neue Methode zur Bestimmung dieses Parameters vorgestellt wird.

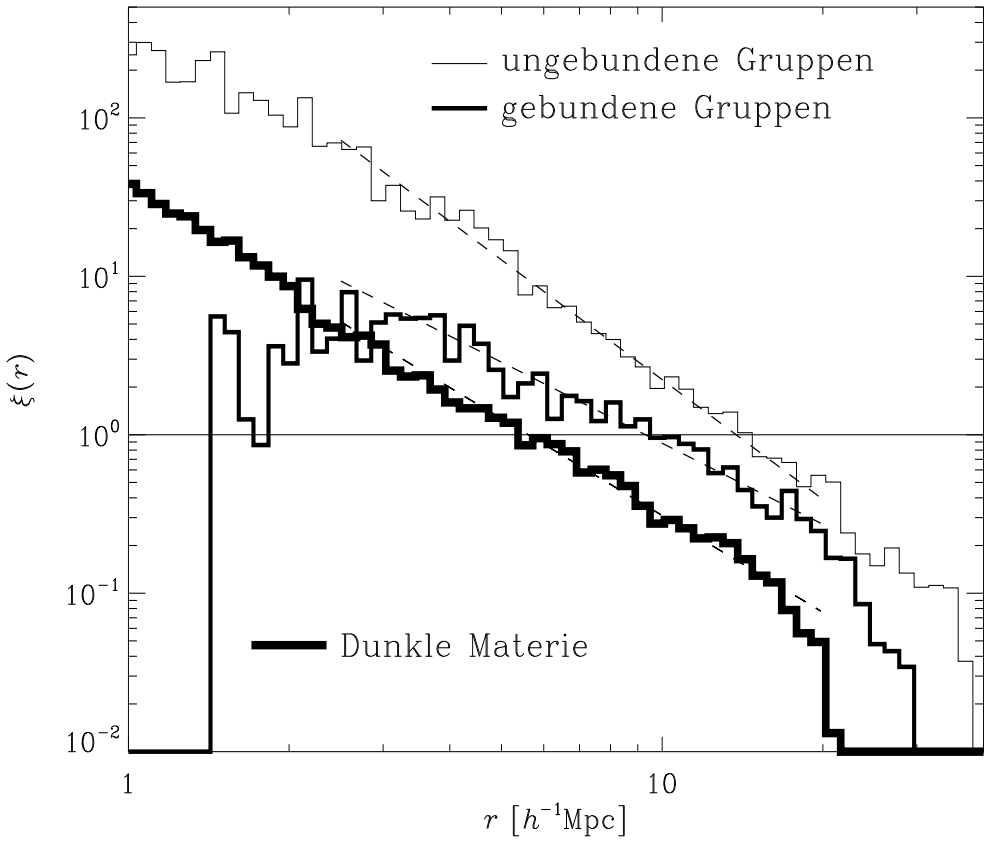


Abbildung 31: Korrelationsfunktionen $\xi(r)$ im ΛCDM-Modell ($z = 0$).

Wird die Korrelationsanalyse auf die numerischen Simulationen angewandt, so findet man, daß die als ungebunden identifizierten Objekte eine erheblich stärkere Korrelation im gesamten Skalenbereich aufweisen; es handelt sich hierbei um eine gegenüber den virialisierten Systemen erhöhte Korrelation, die selbst wiederum eine größere Amplitude als die Verteilung der Dunklen Materie aufweisen. Dieses Resultat findet sich in Abb.31. Die gestrichelten Linien sind dabei aus einer Anpassung der jeweiligen Daten an ein

[10]engl. *to bias* bevorzugen

Tabelle 12: Parameter der Korrelationsfunktionen bei einer Anpassung an ein Potenzgesetz. Die Anzahldichte virialisierter Gruppen beträgt in allen Modelle $n_{\rm cl} = 10^{-4} h^3 {\rm Mpc}^{-3}$.

	Dunkle Materie		virialisierte Gruppen			ungebundene Gruppen	
Modell	r_0	γ	r_0	γ	N	r_0	γ
SCDM	5.4	2.3	6.6	1.8	800	9.2	2.5
ΛCDM	5.6	2.0	9.3	1.7	2200	13.8	2.5
OCDM2	4.5	2.2	7.9	2.0	2200	11.4	2.5

Potenzgesetz nach Gl.(5.12) gewonnen, wobei die Zahlenwerte der Parameter γ und r_0 in Tabelle 12 aufgelistet sind. Um vergleichbare Resultate für die unterschiedlichen Modelle zu erhalten, wurde die Anzahldichte der Objekte auf $n_{\rm cl} = 10^{-4} h^3 {\rm Mpc}^{-3}$ festgesetzt und nur die $N = n_{\rm cl} V$ schwersten Haufen bei der Berechnung der Korrelationsfunktion der virialisierten Gruppen verwendet. Die Werte für N sind ebenfalls in Tabelle 12 angegeben. Es ist offensichtlich, daß die Amplituden des SCDM- und OCDM2-Modells kleiner als beim ΛCDM-Modell sind; in diesen Modellen ist die Leistung auf großen Skalen zu gering, um die Klumpungseigenschaften der Materie korrekt zu beschreiben.

Allerdings hängt die Amplitude und ebenso die Form der Korrelationsfunktion stark vom Auswahlkriterium für die Teilchengruppen ab. Aus diesem Grund sind in Tabelle 13 die Parameter r_0 und γ bei Verwendung unterschiedlicher Massengrenzen zusammengefaßt; es wurden jeweils nur virialisierte FOF-Objekte mit einer Masse $M \geq M_{\rm cut}$ bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion berücksichtigt, wobei die Massengrenze über die Anzahl der Teilchen angegeben ist. Da massereiche Objekte lediglich an den sehr hohen Spitzen des Dichtefelds zu finden sind, erhält man demzufolge bei einer sukzessiven Erhöhung der Massengrenze eine immer stärkere Korrelation. Dies erklärt den modellunabhängigen Anstieg des Parameters r_0. Die Steigung der Korrelationsfunktion bleibt hingegen annähernd konstant. Es ist bemerkenswert, daß die Amplitude r_0 der gebundenen Objekte im SCDM-Modell am kleinsten ist. Dies Ergebnis ist unabhängig von der Massengrenze und läßt sich durch den Shape-Parameter $\Gamma \simeq \Omega_0 h$ des Powerspektrum erklären. Im SCDM-Modell beträgt der Wert $\Gamma = 0.5$, was im Vergleich zu den von Beobachtungen bevorzugten Wert $\Gamma = 0.25 \pm 0.05$ (Peacock & Dodds 1994, Lin et al. 1996, Borgani et al. 1997) zu hoch ist. Dies führt zu einer zu geringen Leistung auf großen Skalen im Vergleich zu den kleinen Skalen.

Am interessantesten ist jedoch die Tatsache, daß die ungebunden Systeme in jedem Fall die stärkste Korrelation aufweisen; die Amplitude ist sowohl größer als die der Dunklen Materien, als auch der von den gebundenen Gruppen. Die Steigung der Korrelationsfunktion dieser Objekte weist bei einer Fixierung der Cluster-Häufigkeit ebenfalls den größten Wert auf, unabhängig vom kosmologischen Modell. Das bestätigt die Annahme, daß Verschmelzungsprozesse in bevorzugten Gebieten des Universums stattfinden. Die Gebiete mit einer sehr hohen Dichte sind die Plätze, an denen nicht nur die massivsten Galaxienhaufen gefunden werden; es handelt sich hierbei auch um die Orte, wo bevorzugt Verschmelzungsprozesse vonstatten gehen. Und genau das spiegelt auch Abb.32 wider. In diesem Bild ist ein Schnitt der Dicke 2 h^{-1}Mpc durch die gesamte Simulationsbox

Tabelle 13: Parameter der Korrelationsfunktion bei einer Anpassung an ein Potenzgesetz. Es wurden dabei unterschiedliche Massengrenzen bei der Identifikation der gebundenen Halos verwendet. Der Parameter $M_{\rm cut}$ gibt die minimale Anzahl von Teilchen pro FOF-Gruppe an.

Massengrenze	**SCDM**		**ΛCDM**		**OCDM2**	
$M_{\rm cut}$	r_0	γ	r_0	γ	r_0	γ
25	4.0	2.1	6.2	1.8	5.6	1.7
50	4.5	1.8	8.3	1.7	6.7	1.9
100	5.1	1.7	9.1	1.7	8.4	2.1

des ΛCDM-Modells gezeigt, auf dem zusätzlich zu den Dunkle-Materie-Teilchen auch die Orte markiert sind, an denen ungebundene Teilchengruppen identifiziert wurden. Man erkennt deutlich, daß diese Systeme bevorzugt in den überdichten Regionen zu finden sind.

Da man davon ausgehen kann, daß Verschmelzungsprozesse (sowie starke Wechselwirkungen mit der Umgebung) Auslöser für die Erzeugung der leuchtkraftstarken Infrarot-Galaxien sind (Sanders & Mirabel 1996), beobachtet man auch bei sehr leuchtkraftstarken Infrarot-Galaxien ($L > 10^{12} L_\odot$) eine erhöhte Korrelation (Bouchet et al. 1993). Je größer die Leuchtkraft der Infrarot-Galaxien, desto stärker auch die Korrelation, die sogar bis an die Amplitude von beobachteten Galaxienhaufen heranreicht (Gao 1993). Diese Galaxien könnten ein wichtiges Stadium bei der Bildung von Quasaren und elliptischen Galaxien darstellen, und wie in diesem Abschnitt gezeigt, entstehen solche Objekte nicht zufällig im Raum, sondern sie bilden sich in den Gebieten, in denen auch die massivsten Galaxienhaufen zu finden sind.

Spinparameter

Galaxien und auch Galaxienhaufen besitzen ebenfalls einen Drehimpuls, der entscheidend von der Morphologie des Objekts abhängig ist (s.u.). Üblicherweise wird der Wert des Drehimpuls als Verhältnis zwischen beobachteter Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelgeschwindigkeit ω_0 angegeben, die notwendig ist, um die Rotation allein durch die potentielle Energie aufzubringen:

$$\begin{aligned} L_0 &= MRv = MR^2\omega_0 && \text{; Drehimpuls} \\ E_{\rm kin} &= \tfrac{1}{2}Mv^2 = L_0^2/(2MR^2) && \text{; Rotationsenergie} \\ E_{\rm pot} &= -GM^2/R && \text{; potentielle Energie} \\ |E_{\rm pot}| &= 2E_{\rm kin} && \text{; Virialsatz} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Kombiniert man diese Gleichungen untereinander, so gelangt man zu der Definition des Spinparameters:

$$\lambda := \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L/(MR^2)}{\sqrt{GM/R^3}}\,, \tag{5.15}$$

wobei die Beziehung $L = MR^2\omega$ ebenfalls dazu verwendet wurde, um den Wert der

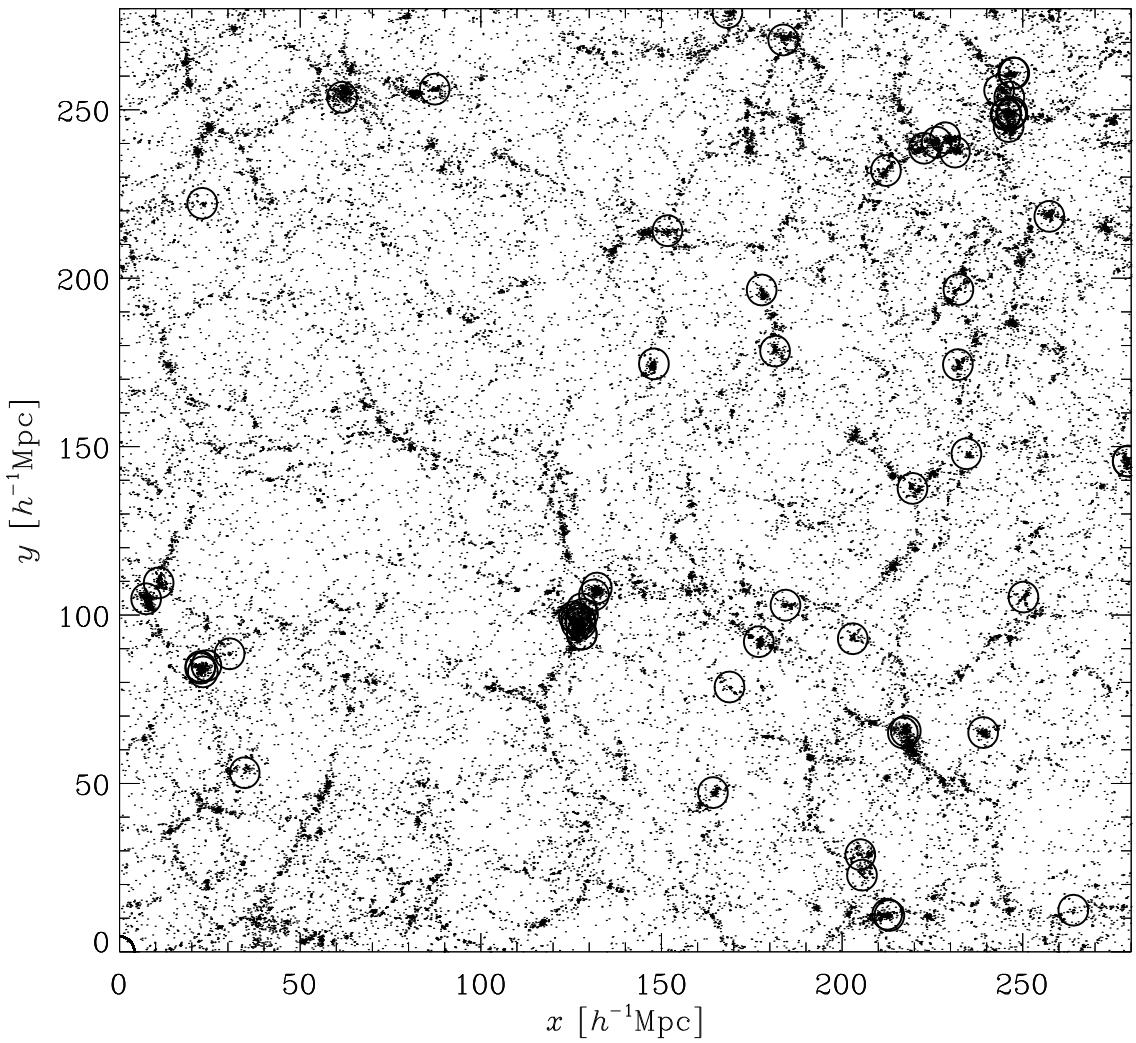


Abbildung 32: Schnitt der Dicke $2h^{-1}\mathrm{Mpc}$ durch die Simulationsbox des ΛCDM-Modells. Die ungebundenen Objekte sind durch Kreise markiert.

Winkelgeschwindigkeit ω mit Hilfe des experimentell bestimmten Drehimpulses L auszudrücken. Für Spiralgalaxien beträgt der Wert des Spinparameters λ in etwa $\lambda \simeq 0.4$, wohingegen bei elliptischen Galaxien nur ungefähr $\lambda \simeq 0.05$ erreicht wird.

In den vorliegenden Simulationen (mit Ausnahme von OCDM1) wurde dieser Wert für alle identifizierten Teilchengruppen bestimmt. In Abb.33 ist nun die Häufigkeitsverteilung $dn(\lambda)/d\lambda$ der virialisierten Objekte aufgetragen, welche die Anzahl von Objekten mit einem Spinparameter der Größe λ pro Volumeneinheit im Intervall $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ angibt. Die beiden obersten Kurven gehören zum SCDM-Modell, die nächsten beiden zum ΛCDM- und die letzten beiden zum OCDM2-Modell. Man kann keine signifikante Entwicklung der Verteilung im Rotverschiebungsintervall von $z = 0.5$ nach $z = 0.0$ feststellen. Dies deckt sich mit dem Ergebnis, daß der Drehimpuls lediglich in den frühen Phasen der Galaxie-

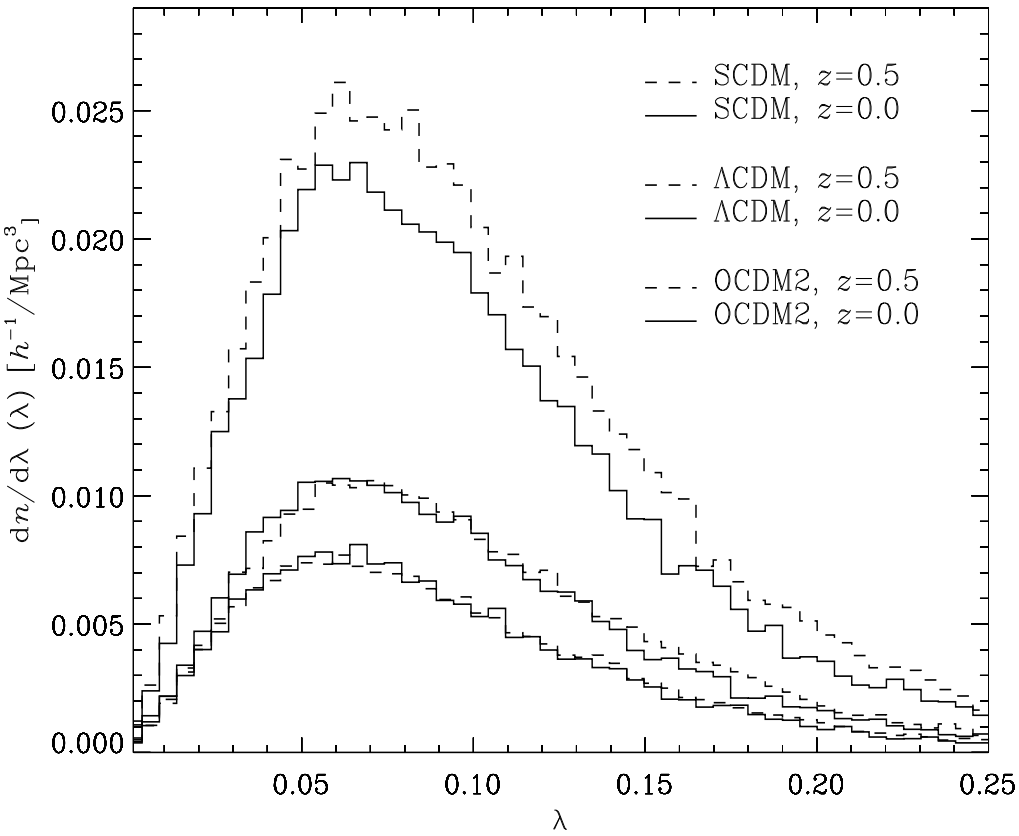


Abbildung 33: Häufigkeitsverteilung des Drehimpulsparameters virialisierter Gruppen in verschiedenen kosmologische Modelle.

und Haufenbildung wächst (Barnes & Efstathiou 1987). Man erwartet eher einen Abfall des Drehimpuls zu späteren Zeiten, welcher auch ansatzweise in der Verteilungsfunktion des SCDM-Modell zu erkennen ist. Die Kurven in Abb.33 decken sich dabei mit den Verteilungsfunktionen, wie sie auch in anderen Arbeiten gefunden wurden (Barnes & Efstathiou 1987, Warren et al. 1992)

Eine Massenabhängigkeit des Spinparameters ist ebenfalls nur schwach ausgeprägt, was in Abb.34 nachgeprüft werden kann. Es kann lediglich ein geringer Trend hin zu kleinen Spinparametern für massereichere Gruppen beobachtet werden (Barnes & Efstathiou 1987, Cole & Lacey 1996, Thomas et al. 1998). Allerdings unterscheiden sich auch in dieser Eigenschaft die virialisierten und ungebundenen Teilchengruppen voneinander. Die nicht-virialisierten Objekte weisen systematisch einen höheren Drehimpuls auf, was jedoch auf die erhöhte Aufprallgeschwindigkeit bei gleichzeitig größerem Stoßparameter zurückgeführt werden kann.

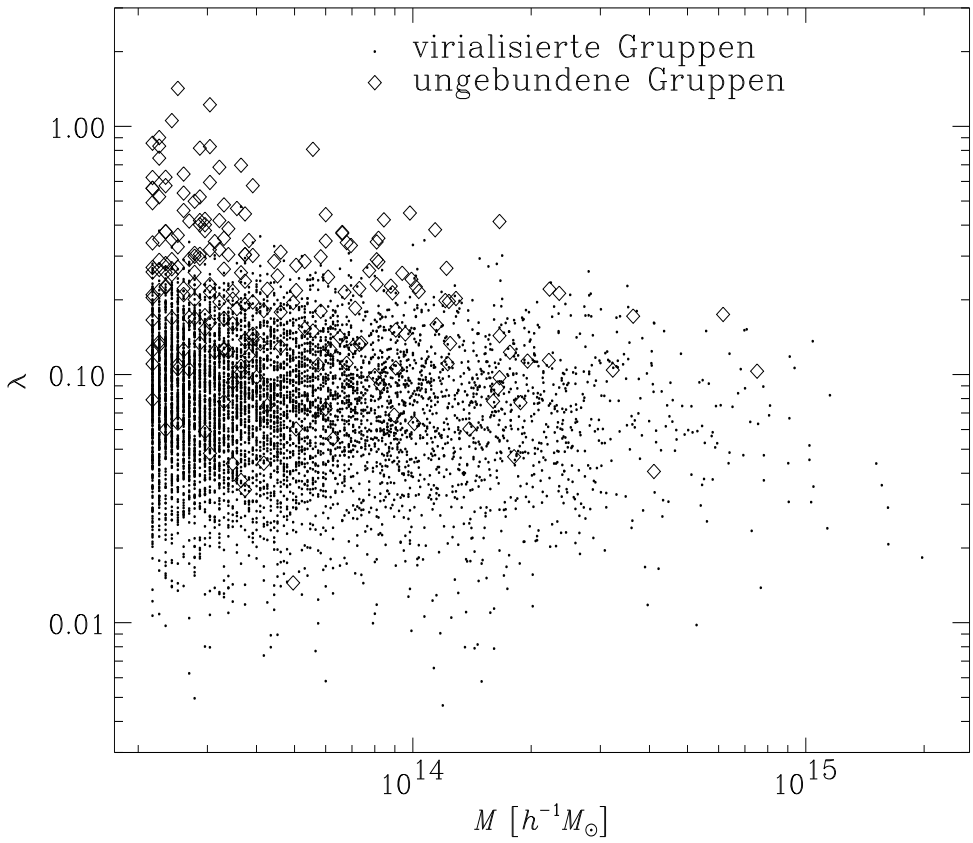


Abbildung 34: Massenabhängigkeit des Spinparameters im ΛCDM-Modell für $z = 0$.

5.3 Unterstrukturen von Galaxienhaufen

In diesem Abschnitt soll eine Methode zur Quantifizierung von Unterstrukturen in Gruppen und Haufen von Galaxien vorgestellt, kalibriert und auf die kosmologischen Modelle aus Tabelle 1 (S.20) angewendet werden. Das Verfahren geht zurück auf eine Idee von Dressler & Shectman (1988), die es zur Bestimmung von Unterstrukturen in beobachteten Galaxienhaufen verwendet haben. Das Verfahren soll nun auf numerische Simulationen angewandt und mit anderen Algorithmen zur Quantifizierung von Strukturen in Galaxienhaufen verglichen werden.

Der Grundgedanke der Methode besteht in der Verwendung von Geschwindigkeitsabweichungen innerhalb projizierter Galaxienhaufen. Die Empfindlichkeit, sowie die Abhängigkeit von den grundlegenden Parametern der Methode soll in diesem Abschnitt getestet werden, bevor sie zur Quantifizierung von Unterstrukturen in Galaxienhaufen numerischer Simulationen herangezogen wird. Es kann gezeigt werden, daß in den Modellen ca. 30% der untersuchten Objekte Unterstrukturen aufweisen; dieser Wert stimmt gut

mit aktuellen Beobachtungen (z.B. Solanes et al. 1998) überein, hängt allerdings stark vom Schwellenwert zur Unterteilung der Objekte in 'strukturlos' und 'strukturiert' ab. Es wird weiterhin eine gute Übereinstimmung mit anderen Verfahren zur Quantifizierung von Strukturen festgestellt (z.B. der Multiplizität-Methode), die allerdings von einer nicht zu vernachlässigbaren Streuung begleitet wird. Diese Streuung läßt sich auf Projektionseffekte zurückführen, sowie den Einfluß kleiner, einfallender Teilchengruppen auf den zu untersuchenden Galaxienhaufen.

Vorab sollen jedoch aktuelle Beobachtungen und Ergebnisse zu Strukturen in Galaxienhaufen zur Motivation des folgenden Kapitels vorgestellt werden.

5.3.1 Beobachtungen zu Unterstrukturen

In den letzten zwanzig Jahren wurden Unterstrukturen in einer ausgeprägten Anzahl von Galaxiengruppen und Galaxienhaufen entdeckt; zum einen als (Neben-)Maxima in der projizierten Galaxienverteilung von Galaxienhaufen (Baier 1979 und Geller & Beers 1982), zum anderen als Abweichungen von der sphärischen Symmetrie von Röntgen-Kontourkarten (Forman et al. 1981). Die Quantifizierung dieser Unterstrukturen stellt jedoch ein nicht-triviales Problem dar: West et al. (1988) haben an Hand von numerischen Simulationen erkannt, daß bei der Analyse von Unterstrukturen Projektionseffekte eine wesentliche Rolle spielen und einen entscheidenden Einfluß auf die Ergebnisse haben. Solche Effekte sind jedoch bei der Auswertung von Röntgenbeobachtungen weniger stark ausgeprägt, und so liefern auch neueste Beobachtungen im Röntgenbereich verläßlichere Ergebnisse für die Häufigkeit von Unterstrukturen in Galaxienhaufen (Mohr et al. 1993, Buote & Xu 1997). Im Optischen hingegen erhält man bessere Informationen zur Geschwindigkeitsverteilung der Galaxien in einem Haufen.

Die Identifikation von Unterstrukturen kann mit Hilde verschiedener Methoden erzielt werden, wie z.B. Geschwindigkeitsabweichungen von Untergruppen eines Galaxienhaufens (Dressler & Shectman 1988), Geschwindigkeitserhöhungen von cD Galaxien im Vergleich zum eigentlichen Haufen (Bird 1994), dem hierarchischen Baum-Algorithmus, welcher zwei (projizierte) Orts- und eine Geschwindigkeitskoordinate verwendet (Serna & Gerbel 1996), sowie der Anwendung von Wavelet-Analysen (Girardi et al. 1997). Alle diese Verfahren liefern insofern vergleichbare Ergebnisse, daß sie für einen Anteil von ca. 30% - 40% der untersuchten Galaxienhaufen statistisch signifikante Unterstrukturen gefunden haben. Allerdings hängt der genaue Prozentsatz im Detail doch stark von der verwendeten Methode ab (Pinkney et al. 1996). Neuere Untersuchungen zu Unterstrukturen basieren dabei allerdings auf der 'Geschwindigkeits-Methode' von Dressler & Shectman (1988): Zabludoff & Mulchaey (1998) haben sechs kleine Gruppen, Solanes et al. (1999) 67 reiche Haufen aus dem ENACS-Katalog mittels dieses Verfahrens auf Unterstrukturen untersucht. Um die Bedeutung dieses Quantifizierungsverfahrens zu überprüfen, wurde eine detaillierte Analyse sowie ein Vergleich mit Simulationen unterschiedlicher kosmologischer Modelle erstellt, die in den nun folgenden Unterabschnitten vorgestellt werden soll.

5.3.2 Quantifizierung von Unterstrukturen

Die von Dressler & Shectman (1988) eingeführte Methode zur Suche nach Unterstrukturen in Galaxienhaufen (bzw. Teilchengruppen in numerischen Simulationen) mißt eine Korrelation zwischen Geschwindigkeit und (projizierten) Koordinaten und ist empfindlich auf Strukturen, deren mittlere Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsdispersion von der Kinematik des Gesamthaufens abweichen. Zur Anwendung des Verfahrens muß eine gewisse Anzahl von nächsten Nachbarn $N_{\rm nn}$ eines jeden Teilchens/Mitglieds des Haufens festgelegt werden, die zur Berechnung der lokalen Größen $\overline{v}_{\rm local}$und $\sigma_{v,\rm local}$benutzt werden:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{\rm local} &= \frac{1}{N_{\rm nn}} \sum_{j=1}^{N_{\rm nn}} v_j \\ \sigma^2_{v,\rm local} &= \frac{1}{N_{\rm nn}} \sum_{j=1}^{N_{\rm nn}} (v_j - \overline{v}_{\rm local})^2 \ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Anzahl der Nachbarn $N_{\rm nn}$ des Teilchens i bestimmt somit die Größe bzw. Ausdehnung der 'Untergruppe', die zur Berechnung einer lokalen, dem Teilchenort $\vec{r}_i$ zugeordneten, Geschwindigkeit $\overline{v}_{\rm local}$und Geschwindigkeitsdispersion $\sigma_{v,\rm local}$herangezogen wird. Diese Werte gehen dann in die Bestimmung einer (ebenfalls lokalen) Geschwindigkeitsabweichung δ_i ein

$$\delta_i^2 = \frac{N_{\rm nn}}{\sigma_v^2} \left[(\overline{v}_{\rm local} - \overline{v})^2 + (\sigma_{v,\rm local} - \sigma_v)^2 \right] \ , \tag{5.17}$$

wobei den Werten für $\overline{v}$ und σ_v der gesamte Haufen mit N Teilchen zu Grunde liegt. Die Größe δ_i wird für alle Teilchen ($i = 1, N$), die zum Haufen gehören, berechnet. Ein quantitatives Maß für den Grad der Unterstrukturen in der gesamten Teilchengruppe bietet die kumulative Größe

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \ , \tag{5.18}$$

die im folgenden als Geschwindigkeits- bzw. Delta-Abweichung bezeichnet wird.

In Abb.35 ist das Verfahren an Hand eines Beispiels illustriert, indem die Werte $\exp(\delta_i)$ als Radien für Kreise (mit der Koordinate des Teilchens i als Mittelpunkt) dienen. Die Teilchengruppe ist der SCDM-Simulation (vgl. Tabelle 1) entnommen und wurde mit einer Linking-Länge von $ll = 0.2$ identifiziert. Die (kumulative) Delta-Abweichung des Haufens zeigt dabei Hinweise auf Unterstrukturen, allerdings keine sehr ausgeprägten. Zur Berechnung der einzelnen δ_i Werte wurden die Teilchen zuerst in die xy-Ebene projiziert und anschließend die Werte $\overline{v}_{\rm local}$, $\sigma_{v,\rm local}$, $\overline{v}$, sowie σ_v in diesen zwei Dimensionen berechnet. Es ist offensichtlich, daß die Gruppe ein ausgeprägtes Zentrum aufweist, welches sich genau in der Mitte der Abbildung finden läßt. Rechts davon, sowie etwas oberhalb des Zentrums, befinden sich Teilchengruppen, deren Geschwindigkeitswerte von denen des gesamten Haufens abweichen. Dies macht sich durch die größeren Radien der Kreise bemerkbar, die eine graphische Präsentation der δ_i-Werte darstellen. Allerdings

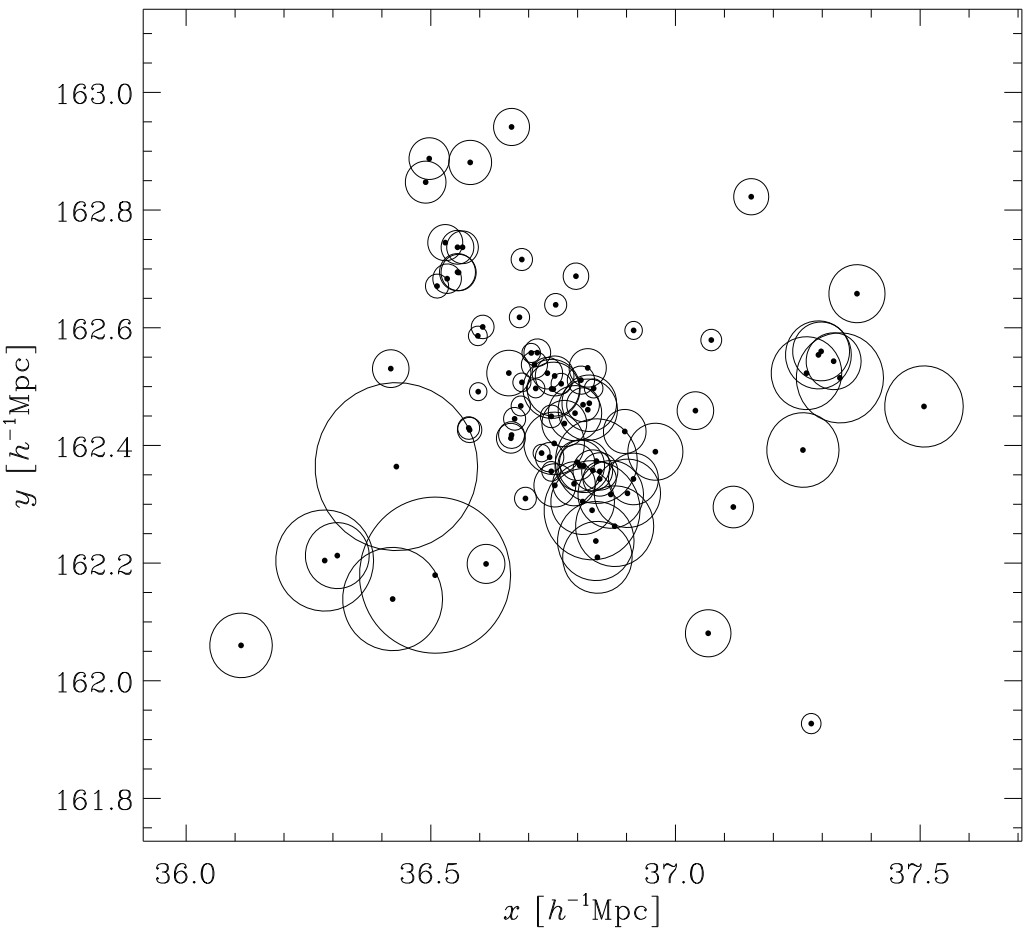


Abbildung 35: Unterstrukturen einer Teilchengruppe im SCDM-Modell.

handelt sich hierbei nicht um Unterstrukturen des Haufens sondern um kleinere Objekte bzw. auch Einzelteilchen, die vermutlich langsam auf das Zentrum zufallen. Ebenso findet man im linken unteren Bereich einige Teilchen, deren Kinematik stark von der des Haufens abweicht und die eher schnell einfallenden Einzelteilchen als einer Unterstruktur entsprechen. Die Abbildung soll lediglich verdeutlichen, daß die Verwendung der einzelnen Werte δ_i zur Bestimmung der Positionen von Unterstrukturen nützlich sein kann; um jedoch quantitative Aussagen zu erhalten, ist die Größe Δ notwendig. Die Delta-Abweichung ist dabei um so größer, je stärker sie durch kinematisch abweichende Untergruppen geprägt ist.

Einer der großen Vorteile dieser Methode ist, daß man keinerlei Annahmen über die Geometrie und die Position von Unterstrukturen im voraus machen muß. Das Verfahren arbeitet unabhängig von Parametern, die z.B. bestimmte Bereiche im Galaxienhaufen bei der Suche nach Unterstrukturen bevorzugen könnten. Außerdem ist dieses Verfahren bestens geeignet, um in Galaxienhaufen, bei denen lediglich projizierte Koordinaten in einer Ebene zur Verfügung stehen, nach Unterstrukturen zu suchen. Aus diesem Grund wurde es bei der Analyse von simulierten Galaxienhaufen ebenfalls in nur zwei Dimensio-

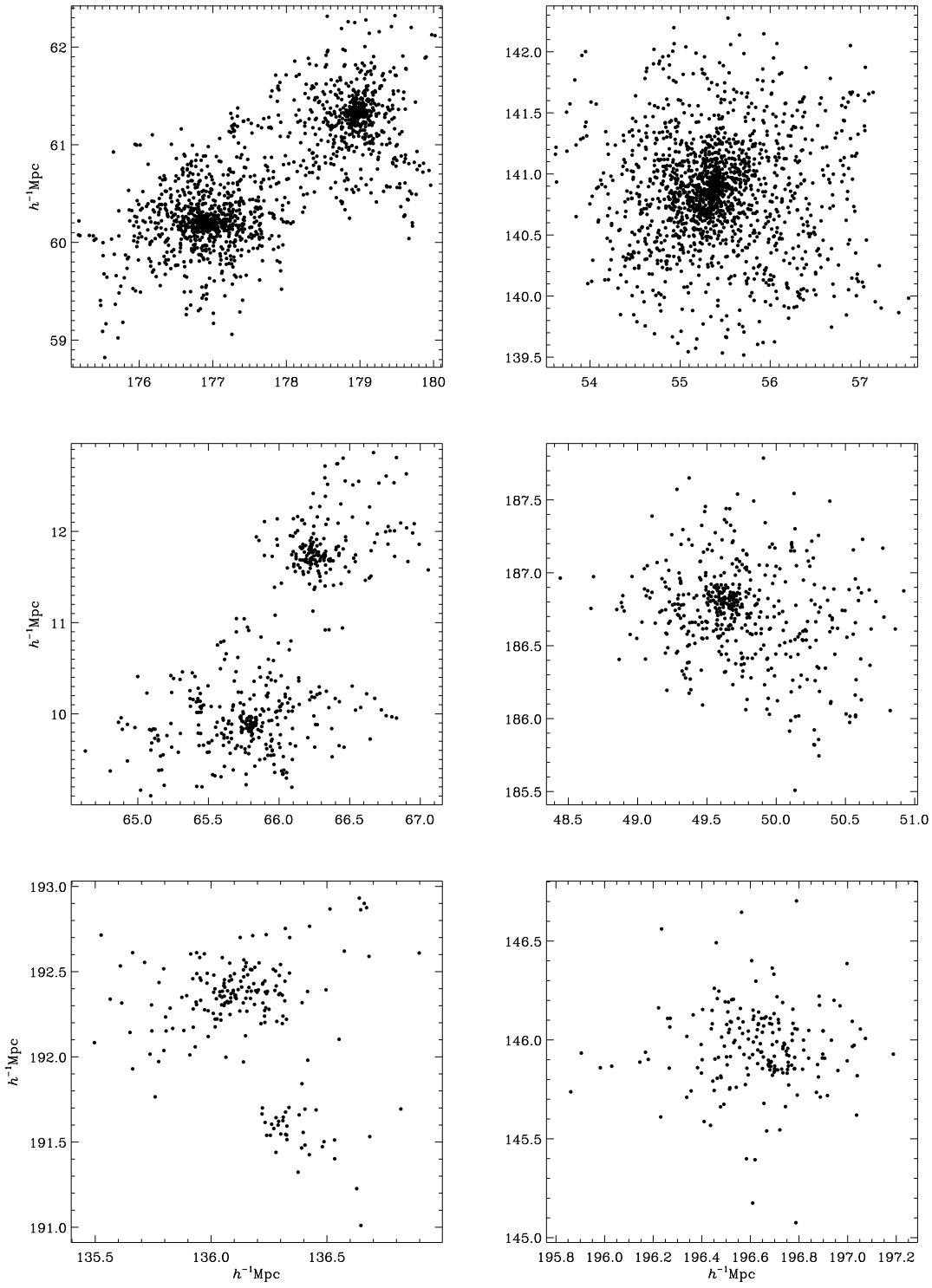


Abbildung 36: Sechs der 30 Testhalos (zwei aus jedem Massenbereich) zur Kalibration der Delta-Abweichung in xy-Projektion.

nen angewandt: Alle Teilchengruppen wurden vor der Berechnung der Delta-Abweichung in eine Ebene projiziert. Um eventuelle Projektionseffekte weitestgehend auszuschließen, basiert der endgültige Wert für Δ auf einer Mittelung über 100 Projektionen aus verschiedenen Blickrichtungen, was zusätzlich eine Berechnung der Schwankung σ_Δ erlaubt, die in den Simulationen ungefähr 10% beträgt.

Um das Verfahren im Detail überprüfen und kalibrieren zu können, wurden die Werte für die Delta-Abweichung an Hand von 30 ausgewählten Teilchengruppen des SCDM-Modells verglichen. Die Gruppen stammen dabei aus drei unterschiedlichen Massenbereichen: $10^{15}h^{-1}M_\odot$(ca. 1000 Teilchen), $5 \cdot 10^{14}h^{-1}M_\odot$(ca. 500 Teilchen) und $2 \cdot 10^{14}h^{-1}M_\odot$(ca. 200 Teilchen), wobei in jedem Massenbereich fünf Haufen *mit* und fünf Haufen *ohne* offensichtliche Unterstrukturen ausgewählt wurde. In Abb.36 sind sechs dieser Testhalos in xy-Projektion gezeigt. In der linken Spalte befinden sich drei Teilchengruppen *mit* Unterstrukturen und in der rechten Haufen *ohne* Strukturen. Das Verfahren hängt offensichtlich von der Gesamtzahl der Teilchen im Haufen, sowie der Anzahl der Nachbarn $N_{\rm nn}$ zur Bestimmung der lokalen Größen $\overline{v}_{\rm local}$ und $\sigma_{v,\rm local}$ ab. Beide Abhängigkeiten sollen in den nächsten beiden Unterabschnitten diskutiert werden.

Anzahl nächster Nachbarn

Der einzige Parameter bei der Berechnung der Delta-Abweichung ist die Anzahl der nächsten Nachbarn $N_{\rm nn}$ eines jeden Teilchens, welcher die Größe der Untergruppen zur Bestimmung der lokalen Werte $\overline{v}_{\rm local}$ und $\sigma_{v,\rm local}$ festlegt. In Abb.37 wurde die Delta-Abweichung, normiert mit der Anzahl aller Teilchen im Haufen, gegen die Anzahl $N_{\rm nn}$ zur Berechnung der lokalen Größen für alle 30 Test-Halos gezeichnet. Die Dicke der Linien ist dabei proportional zur Masse eines jeden Haufens. Die durchgezogenen Linien stehen für Teilchengruppen mit offensichtlichen Unterstrukturen, wobei die gestrichelten Linien die Abhängigkeit bei Haufen ohne Strukturen widerspiegeln. Auf die hier verwendete Wahl der Normierung der Delta-Abweichung wird später eingegangen.

Man entnimmt der Abbildung sofort, daß das Verhalten für Gruppen mit und ohne Unterstrukturen deutlich unterschiedlich ist; Haufen ohne Strukturen zeigen so gut wie keine Abhängigkeit von der Anzahl der nächsten Nachbarn, wohingegen die Haufen mit Strukturen eine monoton steigende Funktion $\Delta(N_{\rm nn})$ für $N_{\rm nn} < 30$ aufweisen (vgl. dünne Linien im Bild). Lediglich für die sehr massearmen strukturbehafteten Haufen fällt diese Beziehung für sehr große $N_{\rm nn}$ wieder ab, was sich dadurch erklären läßt, daß die Auswahl der Untergruppen zur Berechnung von $\overline{v}_{\rm local}$ und $\sigma_{v,\rm local}$ unter Verwendung von $N_{\rm nn} \simeq N$ zu keinen verläßlichen Ergebnissen führen kann und im Extremfall ($N_{\rm nn} = N$) einfach $\Delta = 0$ liefert. Aus der Graphik kann man nun ablesen, daß sich die Wahl eines eher größeren Wertes für $N_{\rm nn}$ empfiehlt, als in anderen Arbeiten vorgeschlagen. Pinkney et al. (1996) empfehlen einen Wert von $N_{\rm nn} = N^{1/2}$, was bei einer Gesamtzahl von ca. 200 Teilchen in etwa 14 nächsten Nachbarn entspricht. In Abb.37 liegt das Maximum der Kurve für die massearmen Gruppen jedoch in etwa bei 25 Teilchen. Dieser Wert wurde nun für alle nachfolgenden Analysen gewählt (unabhängig von der Masse des Objekts), da bei dieser Anzahl nächster Nachbarn auch für massereiche Gruppen eine einfache Diskriminierung zwischen Systemen mit und ohne Unterstrukturen möglich ist.

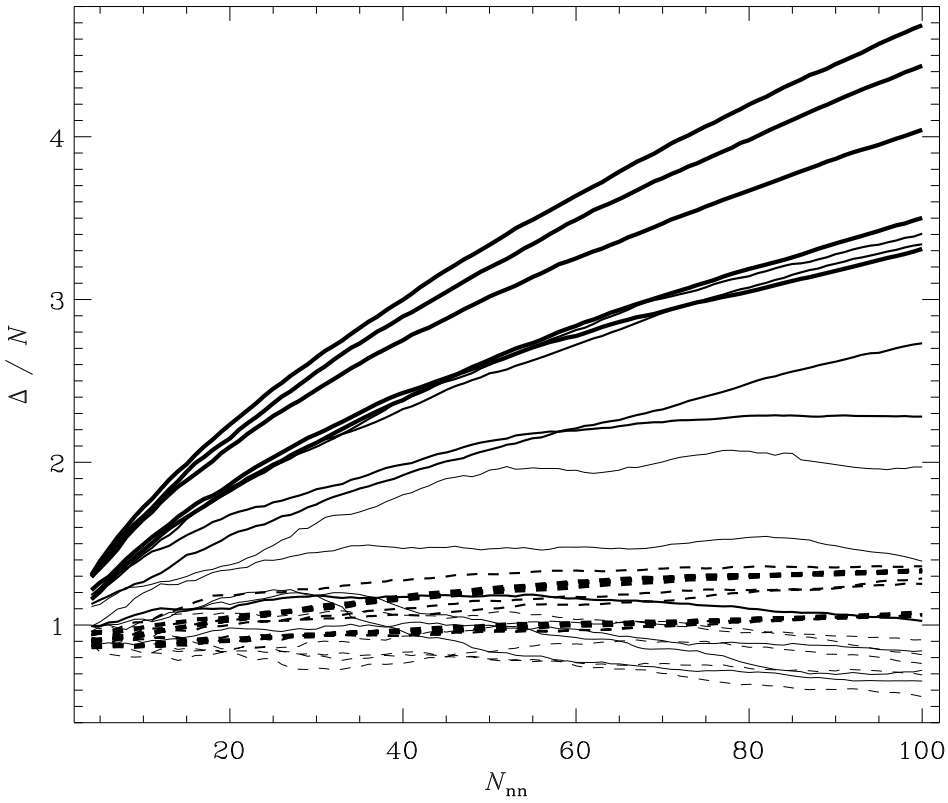


Abbildung 37: Abhängigkeit der Delta-Abweichung von der Anzahl der nächsten Nachbarn $N_{\rm nn}$ für 30 vorausgewählte Teilchengruppen mit offensichtlichen Unterstrukturen (—) und ohne Unterstrukturen (- - -).

Normierung der Delta-Abweichung

Wenn eine zufällige Verteilung von Teilchen und Geschwindigkeiten vorliegt, so hat man eine Abhängigkeit der Delta-Abweichung von der Gesamtzahl der Teilchen der Art $\Delta \propto N$ (Dressler & Shectman 1988); finden sich in dem Haufen jedoch Unterstrukturen, so erhält man Werte $\Delta \geq N$ (Pinkney et al. 1996). Dieser Zusammenhang soll in diesem Unterabschnitt überprüft und letztendlich bestätigt werden. Dazu wurden aus den 30 Testhalos zufällige Untergruppen $N_{\rm s} < N$ (nicht zu verwechseln mit den durch $N_{\rm nn}$ definierten Untergruppen) ausgewählt und zur Berechnung einer eigenen Delta-Abweichung $\Delta_{\rm s}$ herangezogen. Bei der Verwendung einer angemessenen Normierung sollten sich die Delta-Werte für zufällig ausgewählte Untergruppen nicht vom Wert der Gesamtgruppe unterscheiden, da die Untergruppe dieselben Unterstrukturen aufweist. Um Auswahleffekte zu umgehen, wurde für jeden Wert $N_{\rm s}$ die Berechnung von $\Delta_{\rm s}$ über 200 verschiedene Untergruppen gemittelt. Das Ergebnis spiegelt sich in Abb.38 wider. In der oberen Graphik wurde die Delta-Abweichung $\Delta_{\rm s}$ mit der Gesamtzahl der Teilchen im Haufen $N_{\rm s}$ normiert, so wie es auch in anderen Arbeiten vorgeschlagen wird (Pinkney et al. 1996). Das untere Bild,

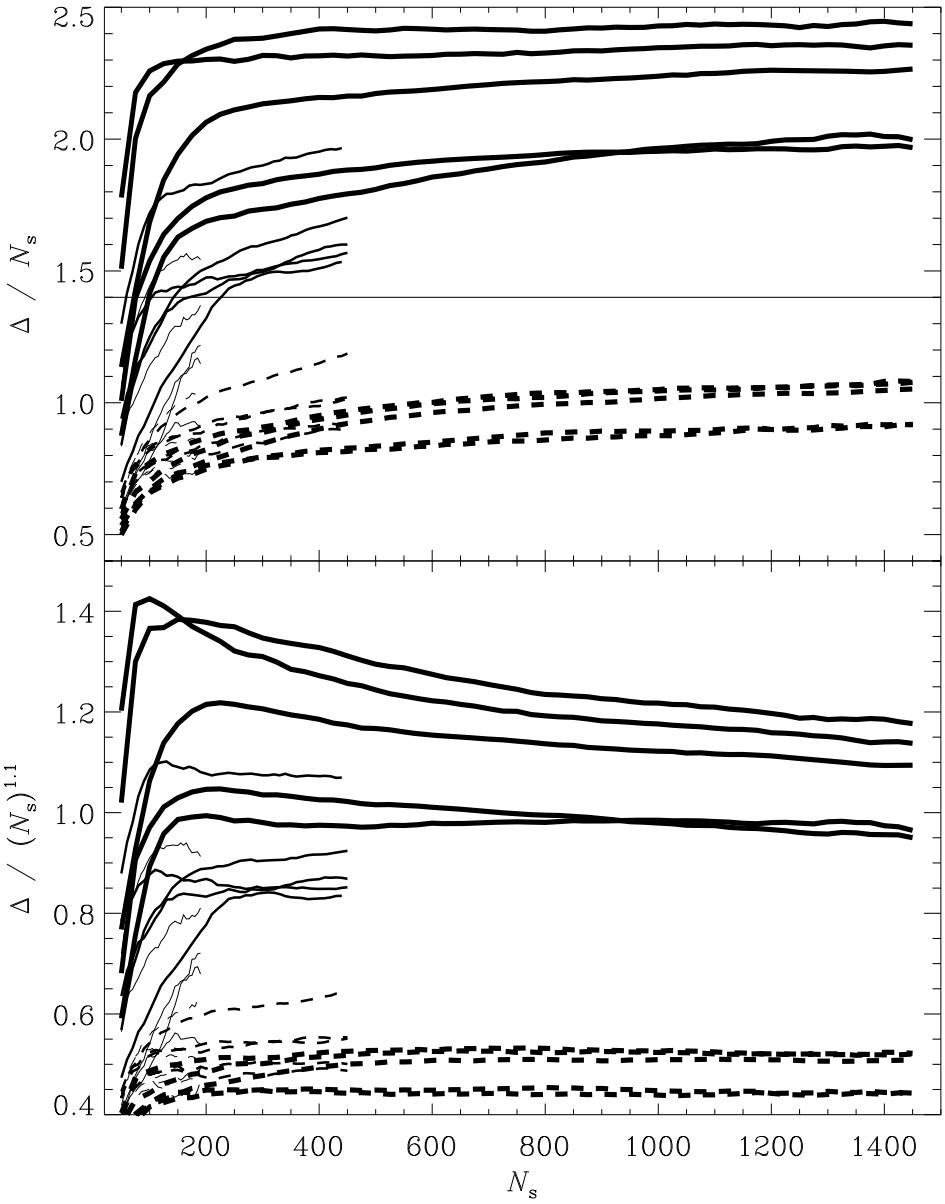


Abbildung 38: Abhängigkeit der Delta-Abweichung von der Größe der Teilchengruppe für 30 vorausgewählte Haufen mit offensichtlichen Unterstrukturen (—) und ohne Unterstrukturen (- - -).

in dem eine leicht abgewandelte Normierung mit $N_s^{1.1}$ angewandt wurde, dient als Vergleich dazu. Einerseits fällt deutlich auf, daß die absoluten Werte für Δ/N_s bzw. $\Delta/N_s^{1.1}$ eine klare Unterscheidung zwischen Gruppen mit und ohne Strukturen zulassen; andererseits zeigt die Abbildung, daß die Diskriminierung dieser Haufen bei einer Normierung

Tabelle 14: Physikalische Eigenschaften der kosmologischen Modelle. Die Boxgröße L ist in $h^{-1}\mathrm{Mpc}$ und der Hubbleparameter h in 100 $\mathrm{km\ s^{-1}Mpc^{-1}}$ angeben.

	Ω_0	$\Omega_{\Lambda,0}$	h	σ_8	L
SCDM1	1.0	0.0	0.5	1.18	200
SCDM2	1.0	0.0	0.5	0.53	200
ΛCDM	0.3	0.7	0.7	1.00	280
OCDM2	0.5	0.0	0.7	0.96	280

mit N_s einfacher ist: Die absoluten Unterschiede der (normierten) Delta-Abweichungen für strukturbehaftete Haufen im Vergleich zu strukturlosen Gruppen sind größer, und die Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Teilchen ist ebenfalls schwächer. Die Dicke der Linien ist, genau wie schon in Abb.37, ein Maß für die Masse der Teilchengruppe; deshalb brechen die Linien auch genau an der Stelle, wo die Größe der zufällig ausgewählten Untergruppe die Gesamtzahl der Teilchen im Haufen erreicht ($N_\mathrm{s} = N$), abrupt ab. Das Abknicken bei kleinen Werten N_s erklärt sich dadurch, daß in diesem Bereich die Unterstrukturen nicht mehr reproduziert werden können, da die Anzahl der zufällig ausgewählten Teilchen zu klein wird.

Für die nun folgende Anwendung der Delta-Abweichung auf Galaxienhaufen in unterschiedlichen kosmologischen Modellen, wurde die Normierung mit der Gesamtzahl der Teilchen gewählt, und zur quantitativen Unterscheidung von Gruppen mit und ohne Unterstrukturen diente der Grenzwert $\Delta/N \simeq 1.4$, welcher in Abb.38 als waagerechte Linie eingezeichnet ist.

5.3.3 Anwendung auf kosmologische Modelle

Das Auftreten von Unterstrukturen in Galaxienhaufen besagt, daß diese Objekte im Universum noch relativ jung sind, da leicht gebundene Untergruppen nur eine gewisse Zeit, die sehr viel kürzer als die Hubble-Zeit ist, in einem Galaxienhaufen Bestand haben können. Im Modell der hierarchischen Strukturbildung gewinnen Galaxienhaufen ihre Masse durch eine ständige Akkretion von Materie sowie durch Verschmelzungsprozesse mit anderen Haufen. Unterstrukturen sind somit ein Kennzeichen für die Aktivität eines Galaxienhaufens und deuten auf das Stattfinden genau solcher Prozesse hin. Da in einem offenen Universum $\Omega_0 < 1$ das Wachstum der Dichtefluktuationen früher zum Stillstand kommt (vgl. Anhang A.3), geht man davon aus, daß die Häufigkeit von Unterstrukturen ein effektives Maß für den Dichteparameter Ω_0 darstellen kann (Richstone, Loeb & Turner 1992, Ehlers & Schneider 1993, Kauffman & White 1993, Bartelmann 1994 und Lacey & Cole 1994). Die Interpretation von Unterstrukturen als Indikator für Verschmelzungsprozesse kann ebenso als Erklärung für einige Eigenschaften von cD Galaxien dienen, wie z.B. deren Orientierung zum Umfeld (West 1994) und der pekuliaren Geschwindigkeitsverteilung in reichen Haufen (Merritt 1985).

Frühere Arbeiten zur Unterscheidung kosmologischer Modelle benutzten u.a. lediglich den Dichtekontrast bzw. das Dichteprofil von Galaxienhaufen (Jing et al. 1995, Thomas et al.

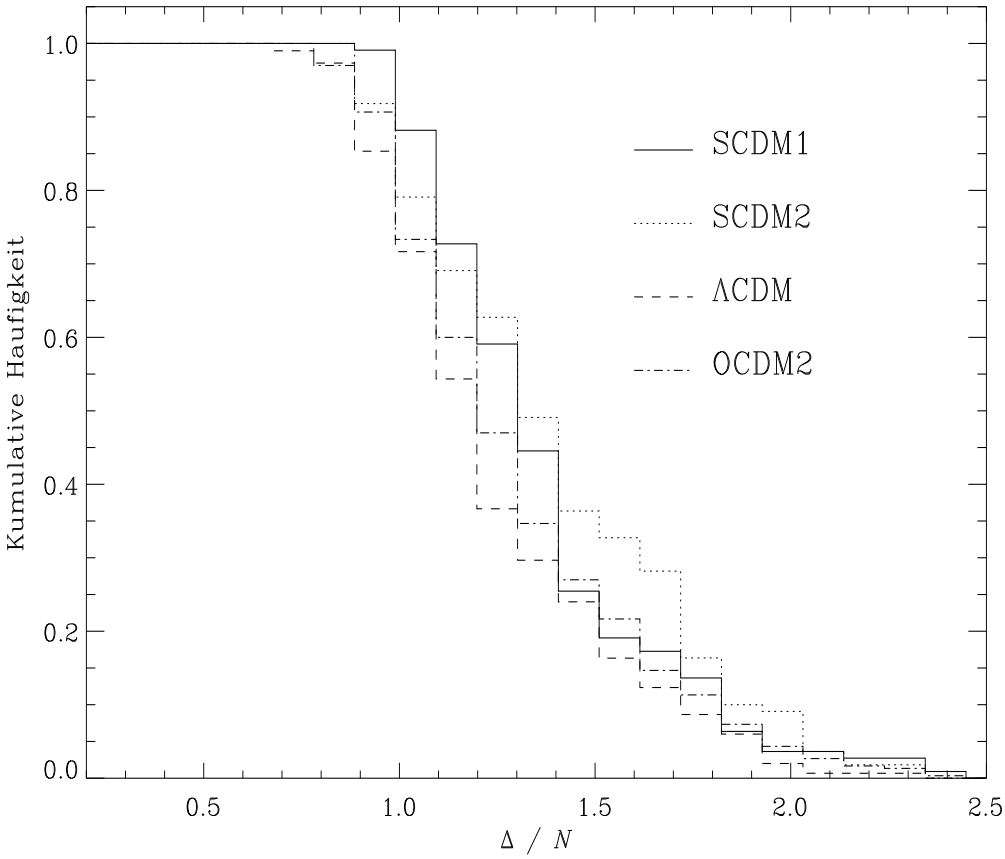


Abbildung 39: Kumulative Häufigkeitsverteilung der Delta-Abweichung Δ/N in unterschiedlichen kosmologischen Modellen.

1997). Hierbei wurden jedoch nur kleine Abweichungen bei den Profilen virialisierter Objekte in unterschiedlichen Modellen gefunden. Um Unterschiede in Röntgenprofilen von Galaxienhaufen korrekt reproduzieren zu können, sind allerdings hydrodynamische Simulationen notwendig, wo erste Versuche schon zu vielversprechenden Ergebnissen geführt haben (Cen 1997, Ghizzardi & Bonometto 1999 und Valdarnini 1999).

In diesem Abschnitt soll das von Dressler & Shectman (1988) eingeführte Verfahren zur Identifikation von Unterstrukturen nun auf die Modelle, spezifiziert in Tabelle 1, angewandt werden. Das SCDM-Modell dient wieder lediglich als Referenzmodell, da es auf Grund der gewählten COBE-Normierung zu viel Leistung auf der Skala von Galaxienhaufen aufweist. Zusätzlich zu den schon in Kapitel 3 vorgestellten Modellen wurde für die Analyse der Unterstrukturen im kosmologischen Kontext ein weiteres Modell herangezogen: ein SCDM-Modell, bei dem das Powerspektrum mittels der Häufigkeit von Galaxienhaufen normiert wurde (σ_8-Normierung). Da sich in einem Einstein-de-Sitter Universum die Parameter Ω_0 und $\Omega_{\Lambda,0}$ im Laufe der Zeit nicht ändern (vgl. Anhang A.2), σ_8 aber proportional zu $a(t)$ anwächst, braucht man lediglich die Daten des COBE-

Tabelle 15: Prozentsätze der Objekte mit $\Delta/N \geq X$ in Abhängigkeit vom kosmologischen Modell.

	Prozentsatz		
Simulation	$X = 1.4$	$X = 1.3$	$X = 1.5$
SCDM1	33%	52%	23%
SCDM2	43%	55%	34%
ΛCDM	27%	33%	22%
OCDM2	30%	41%	25%

Tabelle 16: Kolmogorov-Smirnov (KS) Test für die kumulativen Häufigkeitsverteilungen aus Abb.39.

Simulation	D	Signifikanz
SCDM1 vs. **SCDM2**	0.14	0.24
SCDM1 vs. **ΛCDM**	0.24	$2 \cdot 10^{-4}$
SCDM1 vs. **OCDM2**	0.18	$7 \cdot 10^{-3}$
SCDM2 vs. **ΛCDM**	0.27	$1 \cdot 10^{-5}$
SCDM2 vs. **OCDM2**	0.17	$2 \cdot 10^{-2}$
ΛCDM vs. **OCDM2**	0.11	$4 \cdot 10^{-2}$

normierten SCDM-Modells zu einem früheren Zeitpunkt heranzuziehen, um wieder ein SCDM-Modell zu erhalten, diesmal mit einem kleineren Wert für σ_8. Die Parameter des neuen (SCDM2-)Modells finden sich in Tabelle 14, in der ebenfalls die wichtigsten Parameter der restlichen Modelle nochmals zusammengefaßt sind.

Wie eingangs erwähnt, erwartet man in Abhängigkeit vom kosmologischen Modell Unterschiede in der Häufigkeit von Unterstrukturen bei Galaxienhaufen. Zu diesem Zweck wurde für Abb.39 die kumulative Häufigkeitsverteilung der Delta-Abweichung Δ/N in den vier kosmologischen Modellen aus Tabelle 14 berechnet. Die Teilchengruppen, die in diese Berechnung eingegangen sind, wurden wieder mittels FOF-Algorithmus und denselben Parametern wie in Tabelle 2 (S.38) aus den Simulationen herausgesucht. Zusätzlich wurde die Anzahldichte der Galaxienhaufen zu $n_{\rm cl} = 10^{-5} h^3 {\rm Mpc}^{-3}$ festgelegt, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten (vgl. Abschnitt 5.2.2). Somit wurden lediglich die 80 massivsten Haufen in den SCDM-Modellen bzw. die 220 massivsten in den anderen beiden zur Bestimmung der kumulativen Häufigkeitsverteilung verwendet. Alle Verteilungen zeigen dasselbe Verhalten, d.h. in allen Modellen beobachtet man eine ähnliche Häufigkeit von Unterstrukturen in Galaxienhaufen. Zur besseren Unterscheidung sind in Tabelle 15 die Prozentsätze von Gruppen mit Unterstrukturen für unterschiedliche Schwellenwerte Δ/N angegeben.

Aktuelle Beobachtungsdaten zu Unterstrukturen von Galaxienhaufen zeigen, daß in etwa 30% der untersuchten Objekten Strukturen aufweisen (Dressler & Shectman 1988, Zabludoff & Mulchaey 1998, Solanes et al. 1998). Dies spiegelt sich auch in den hier vorgestellten Simulationen wider, wenn man auch eine starke Abhängigkeit vom Grenzwert

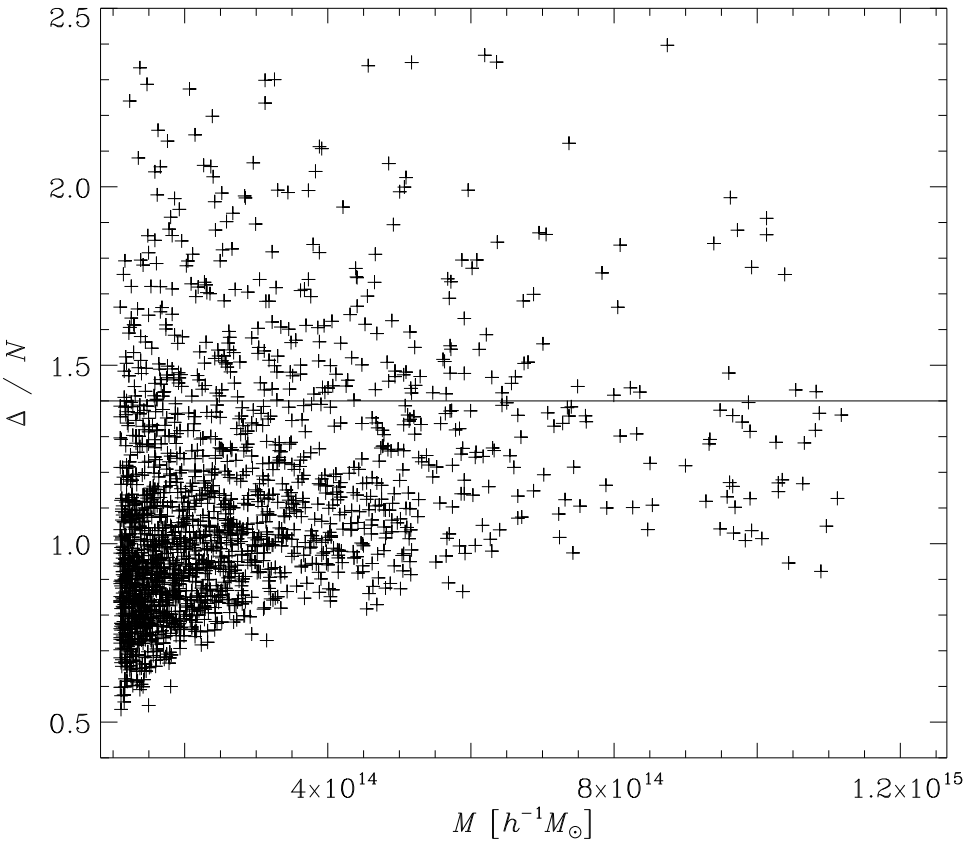


Abbildung 40: Abhängigkeit der Delta-Abweichung von der Masse.

für Δ/N beobachtet. Und wie auch schon erwartet, ist der Bruchteil an Galaxienhaufen mit Unterstrukturen in den SCDM-Modellen größer als in Modellen mit einem kleineren Dichteparameter. Um die Unterschiede der Verteilungsfunktionen besser abschätzen zu können, wurden sie einem Kolmogorov-Smirnov-Test unterzogen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Tabelle 16 zusammengefaßt; die erste Spalte gibt den maximalen Abstand zweier Verteilungsfunktionen an, wohingegen der Wert in der zweiten Spalte ein Maß dafür ist, ob die Verteilungen übereinstimmen. Ein Signifikanz-Wert von Eins bedeutet dabei, daß die kumulativen Häufigkeitsverteilungen der selben Verteilung von Delta-Abweichungen zu Grunde liegen; eine Null hingegen deutet auf Unterschiede hin. Auch an dieser Tabelle erkennt man deutlich, daß die SCDM-Modelle von den Modellen mit den kleineren Dichteparametern abweichen. Das OCDM2- zeigt hingegen eine relativ gute Übereinstimmung mit dem ΛCDM-Modell, d.h. an Hand der Häufigkeit von Unterstrukturen kann nicht zwischen ihnen unterschieden werden. Allerdings sollte erwähnt werden, daß auf Grund der starken Ähnlichkeit aller vier Verteilungsfunktionen, die Häufigkeit von Unterstrukturen kein allzu verläßliches Maß zur Diskriminierung der Modelle ist. Kleine Veränderungen in der Wahl der Grenze für die Delta-Abweichung, welche die Teilchengruppen in strukturlos und strukturiert unterteilt, führen zu Verände-

rungen in den Prozentsätzen, die größer als die Unterschiede zwischen den Modellen selbst sind (vgl. Tabelle 15).

Man kann nun weiter nach einer tendenziellen Abhängigkeit zwischen dem Auftreten von Unterstrukturen und der Masse der untersuchten Objekte fragen. In Abb.40 ist diese Beziehung für das SCDM1-Modell aufgetragen. Es finden sich im gesamten Massenbereich Teilchengruppen sowohl mit als auch ohne Unterstrukturen, wobei die Streuung für die massearmen Objekte erheblich ausgeprägter ist. Geht man jedoch zu immer massiveren Haufen über, so steigt auch der Mittelwert der Delta-Abweichung (im jeweiligen Massenbereich !) an, d.h. der Prozentsatz an Galaxienhaufen mit Unterstrukturen nimmt zu großen Haufen hin zu. Dieses Resultat hat ebenfalls Einfluß auf die Diskriminierung unterschiedlicher Modelle mit Hilfe der Häufigkeit von Unterstrukturen: Je massereicher die berücksichtigen Haufen sind, desto ausgeprägter ist der Anteil von Haufen mit Unterstrukturen.

Wie schon in Abschnitt 5.2 gezeigt, können nicht-virialisierte Teilchengruppen mit Verschmelzungsprozessen identifiziert werden. Somit müßten gerade diese Objekte ein hohes Maß an Unterstrukturen aufweisen. Aus diesem Grund wurden die identifizierten Haufen in allen vier Modellen erneut in die Kategorien 'virialisiert' und 'nicht-virialisiert' eingeteilt, und für beide Klassen von Objekten die Häufigkeitsverteilung der Delta-Abweichung gesondert bestimmt. In Abb.41 sind nun die differentiellen Häufigkeitsverteilungen aufgetragen. Der Übersichtlichkeit halber sind alle Verteilungen auf Eins normiert, was die vergleichbaren Amplituden der Funktionen für virialisierte und nicht-virialisierte Systeme erklärt. In Wirklichkeit ist der Prozentsatz nicht-virialisierter Objekte natürlich sehr klein, wie es auch Tabelle 6 (S.72) entnommen werden kann.

Diesmal zeigen sich erhebliche Unterschiede in den Verteilungen für gebundene und ungebundene Systeme; allerdings sind auch diese Abweichungen so gut wie unabhängig vom kosmologischen Modell. Nicht virialisierte Teilchengruppen weisen erheblich mehr Unterstrukturen als relaxierte Objekte auf, was erneut bestätigt, daß bei diesen Systemen Verschmelzungsprozesse vonstatten gehen und Unterstrukturen in Galaxienhaufen ein deutliches Anzeichen für solch eine Aktivität sind.

5.3.4 Vergleich mit anderen Unterstruktur-Indikatoren

Um die Verläßlichkeit der Delta-Abweichung zu überprüfen, wurde zur Quantifizierung von Unterstrukturen ebenfalls die Multiplizität-Methode auf die Galaxienhaufen in den unterschiedlichen kosmologischen Modellen angewandt. Dieses Verfahren basiert auf der Verwendung von zwei FOF-Auswertungen mit unterschiedlichen Linking-Längen. Zusätzlich zur schon vorhandenen Analyse mit $ll = 0.2$ für die SCDM-Modelle und $ll = 0.17$ bzw. $ll = 0.16$ für das OCDM2- und ΛCDM-Modell, wurden die Simulationen mit den Linking-Längen $ll/2 = 0.1$ und $ll/2 = 0.08$ für die SCDM- bzw. die beiden anderen Modelle analysiert. Für jedes Modell liegt somit eine FOF-Identifikation mit ll und mit $ll/2$ vor. Nun werden die beiden massivsten Untergruppen einer jeden Teilchengruppe der ll-Analyse aus der Liste der neuen FOF-Auswertung mit $ll/2$ herausgesucht. Diese Identifikation von Unterstrukturen ist im Gegensatz zur Delta-Abweichung völlig unabhängig von dynamischen Aspekten und basiert einzig und allein auf den Koordinaten

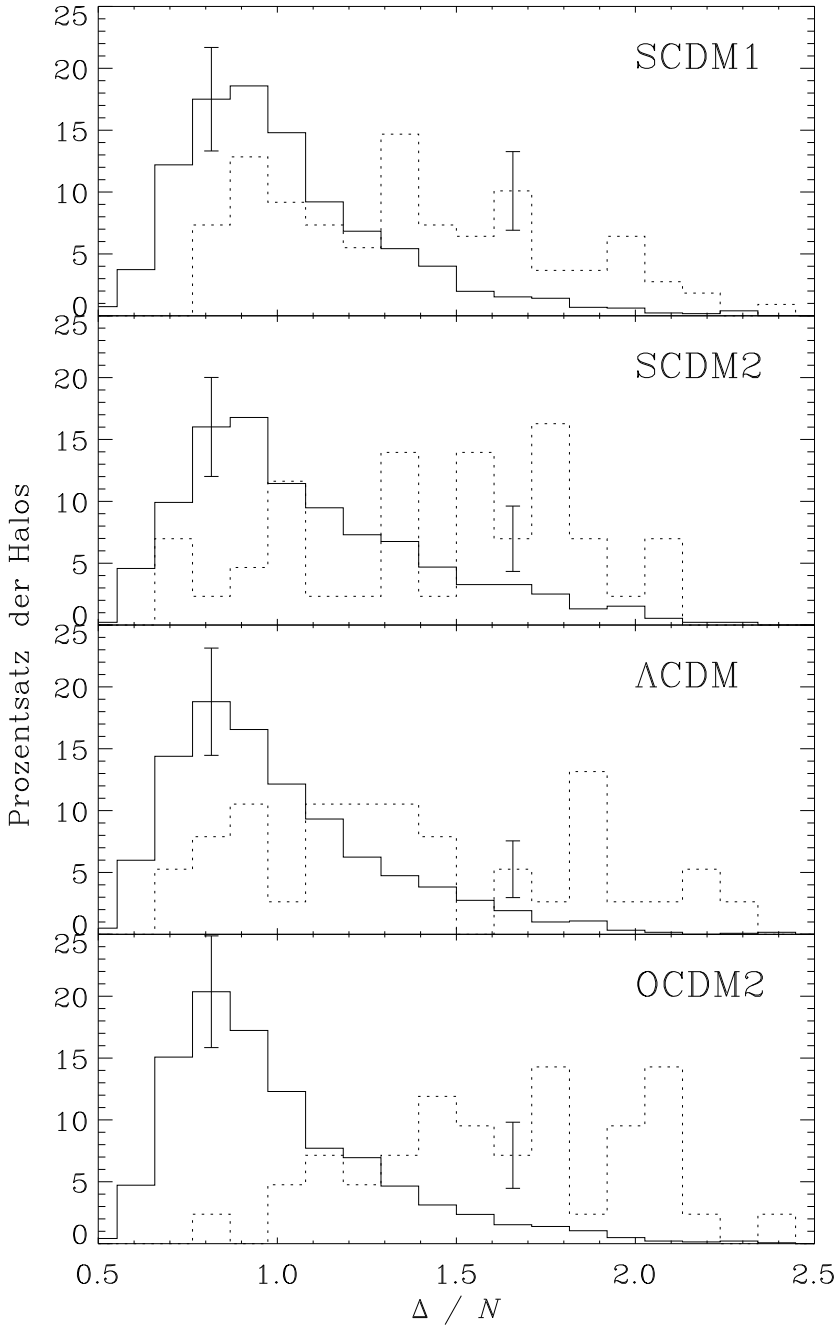


Abbildung 41: Differentielle Häufigkeitsverteilung der Delta-Abweichung Δ/N in unterschiedlichen kosmologischen Modellen. Diesmal wird zusätzlich zwischen virialisierten (—) und nicht-virialisierten (- - -) Objekten unterschieden.

der Teilchen. Die Masse eines jeden Galaxienhaufens setzt sich dabei folgt zusammen:

$$M = m_1 + m_2 + m_{\rm rem} \ , \tag{5.19}$$

wobei M die Masse des Objekts selbst ist, m_1 und m_2 die beiden massivsten Untergruppen dieses Haufens, identifiziert mit $ll/2$, und $m_{\rm rem}$ die restliche Masse beschreibt, die hauptsächlich aus kleinen, lose gebundenen Satelliten zusammengesetzt ist. Die beiden Massen m_1 und m_2 werden nun dazu verwendet, ein quantitatives Maß für Unterstruktur zu bestimmen:

$$M_p = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \ . \tag{5.20}$$

Die Größe M_p wird als 'Multiplizität' bezeichnet.

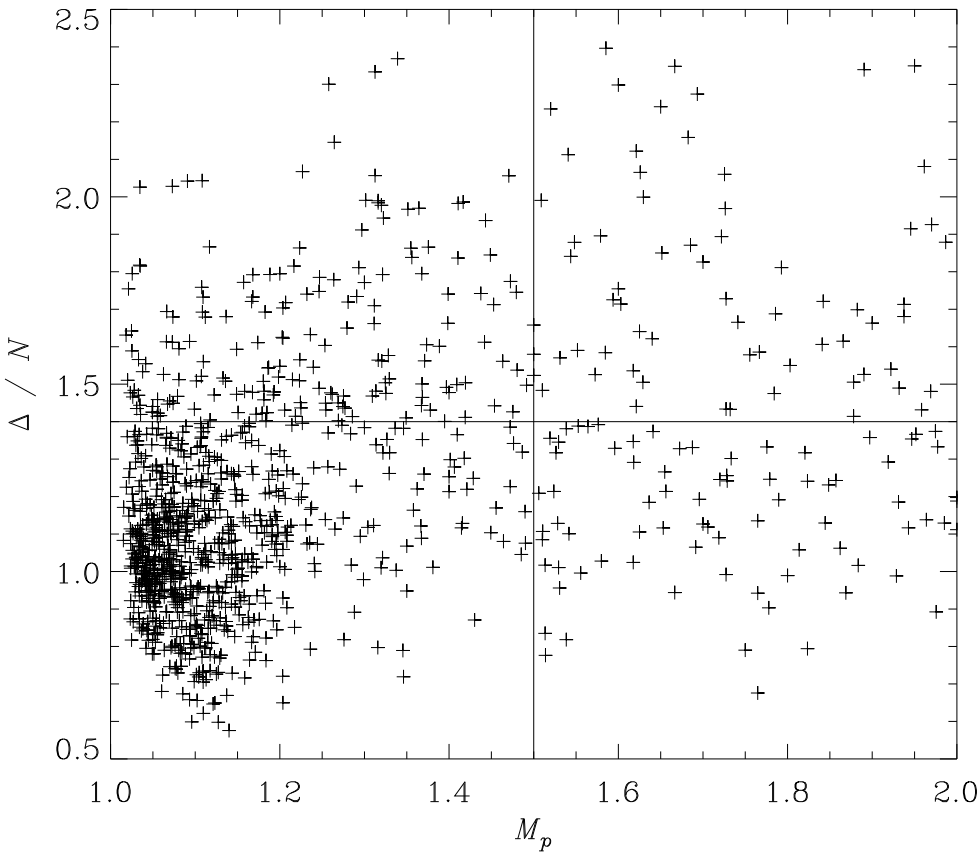


Abbildung 42: Kreuz-Korrelation zwischen Multiplizität und Delta-Abweichung.

Für $M_p \simeq 1$ ist die Masse m_2 gegenüber m_1 vernachlässigbar, was bedeutet, daß eine (eventuell vorhandene) Unterstruktur nicht sehr ausgeprägt sein kann. Erhält man allerdings einen Wert $M_p \simeq 2$, so sind die beiden Untergruppen von vergleichbarer Masse, was

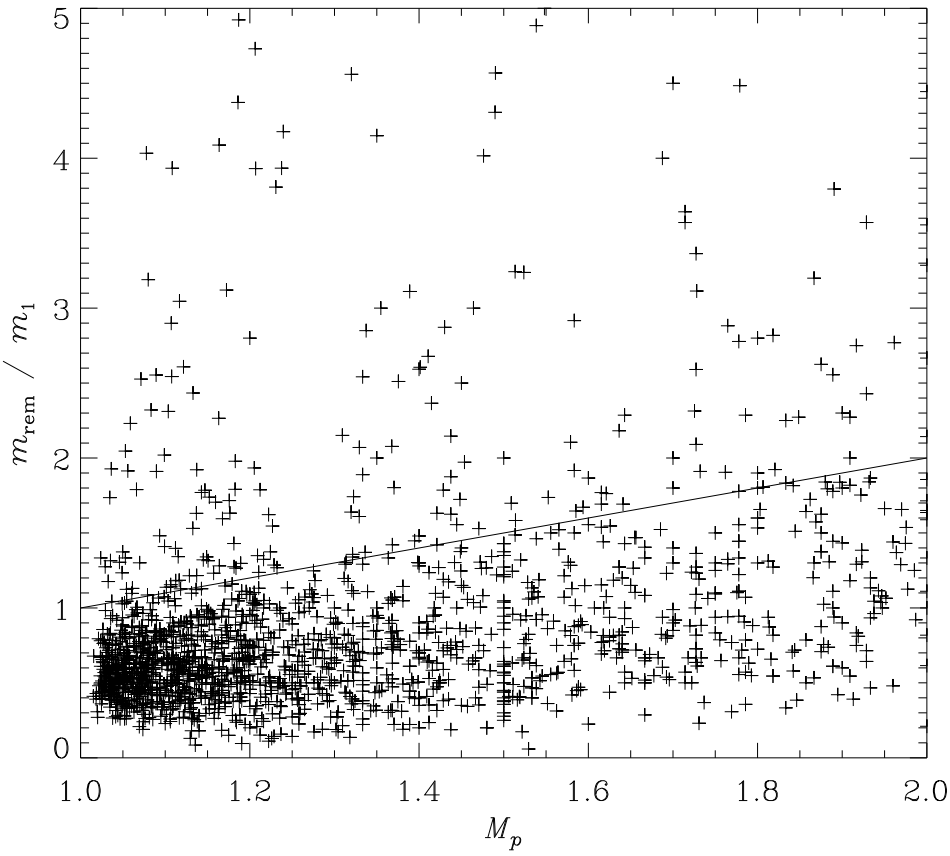


Abbildung 43: Der Einfluß der Restmasse $m_{\rm rem}$ auf die Multiplizität.

als ein deutlicher Hinweis auf Struktur im Objekt der Masse M gedeutet werden kann. Die Zahlenwert der Multiplizität hängt dabei selbstverständlich von der Wahl der zweiten, kleineren Linking-Länge ab: Die Wahl von $ll/2$ bedeutet, daß man nach Strukturen sucht, welche die achtfache Dichte im Vergleich zum Ausgangsobjekt haben, was als eine realistische Einschätzung zur Identifikation von Unterstruktur angesehen werden kann.

Die Kreuz-Korrelation zwischen der Multiplizität und der Delta-Abweichung ist in Abb.42 aufgezeigt. Die Beziehung ist nur für das SCDM1-Modell präsentiert, da die Korrelation in allen anderen Modellen ähnlich aussieht; auch die Multiplizitäts-Methode erlaubt keine bessere Diskriminierung zwischen unterschiedlichen kosmologischen Modellen. Das Kreuz in Abb.42 soll andeuten, in welchen Bereichen die beiden Verfahren einen deutlichen Hinweis auf vorhandene Unterstrukturen geben. Man kann nun eine Korrelation zwischen beiden Verfahren feststellen, allerdings begleitet von einer extremen Streuung. Normalerweise würde man erwarten, keine Haufen im linken oberen Bereich sowie im rechten unteren Bereich zu finden; hier liegen nämlich solche Gruppen, die bei Verwendung des einen Verfahrens Unterstrukturen aufweisen, die jedoch von der jeweils anderen Methode nicht erkannt wurden. Die Punkte links oben weisen von der Kinematik des Gesamthaufens abweichende Unterstrukturen auf, wobei die beiden massivsten Unter-

gruppen – nach der Multiplizität zu urteilen – erheblich unterschiedliche Massen haben müssen. Es ist somit wahrscheinlich, daß es sich bei diesem Objekt um einen Haufen handelt, auf den mit hoher Geschwindigkeit ein Satelliten fällt (vgl. Abb.35). Völlig anderer Natur dagegen sind die Objekte im rechten unteren Bereich. Hier hat man es mit Teilchengruppen zu tun, die aus zwei annähernd gleichschweren Untergruppen aufgebaut sind. Jedoch besagt die Delta-Abweichung, daß die Geschwindigkeitsdispersion jeder einzelnen Untergruppe nicht stark von der Dispersion des gesamten Haufens abweichen kann. Dies wurde im Detail überprüft und kann bestätigt werden. An dieser Stelle muß man sich wieder ins Gedächtnis rufen, daß die Delta-Abweichung lediglich in zwei Dimensionen berechnet wird. Eine mögliche Erklärung besteht somit auch darin, daß die offensichtliche Unterstruktur nicht erkannt wird, da eine Geschwindigkeitskomponente fehlt.

Bei der Bestimmung bzw. Definition der Multiplizität stellt sich ebenfalls die Frage nach der Restmasse m_{rem} und ihrem Verhältnis zu den Massen m_1 und m_2. Falls der Beitrag von m_{rem} zur Gesamtmasse M nicht vernachlässigbar ist, so kann davon ausgegangen werden, daß es sich bei der Teilchengruppe um einen lose gebundenen, gerade erst entstandenen Galaxienhaufen handelt; der Anteil akkretierter Materie bzw. der Einfluß der direkten Umgebung ist in diesem Fall sehr groß, wie es der hohe Beitrag von kleinen Systemen

$$m_{\mathrm{rem}} = \sum_{i=3}^{N_{ll/2}} m_i \tag{5.21}$$

zur Gesamtmasse nahe legt. Die Größe $N_{ll/2}$ ist dabei die Anzahl von Untergruppen, identifiziert bei Verwendung der Linking-Länge $ll/2$. In Abb.43 wird die Beziehung zwischen m_{rem}/m_1 und $(m_1 + m_2)/m_1$ (der Multiplizität) stellvertretend für alle Modelle wieder an Hand des Zusammenhangs im SCDM1-Modell gezeigt. Die durchgezogene Linie in dem Bild soll den Bereich hervorheben, in dem man den Einfluß der Akkretion vernachlässigen kann. Oberhalb der Linie finden sich die Objekte, bei denen die Restmasse m_{rem} einen großen Beitrag zur Gesamtmasse M des Galaxienhaufens liefert. Es finden sich dort ca. 13% der Teilchengruppen, bevorzugt jedoch in dem Bereich $M_p < 1.5$, wo mittels Multiplizität keine Unterstrukturen identifiziert werden. Das läßt sich so interpretieren, daß ein ständiger Fluß von Materie auf einen Galaxienhaufen dazu tendiert, Unterstrukturen zu zerstören. Dieser Effekt ist allerdings sehr gering und sollte nicht mit Verschmelzungsprozessen verwechselt werden, die ja gerade zu Unterstrukturen führen. Zusätzlich wurde der Einfluß der Akkretion auch bei der Quantifizierung von Unterstrukturen durch die Delta-Abweichung überprüft. Hier zeigt sich ebenfalls, daß hohe Werte für m_{rem}/m_1 mit kleinen Werten für Δ/N korrespondieren.

5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden einige Gründe aufgeführt, weshalb es von Interesse ist, die in numerischen Simulationen identifizierten Teilchengruppen genauer im Hinblick auf Virialisierung zu untersuchen. Eine überwiegende Mehrheit der Objekte erfüllt das Virial-Theorem und das leichte Abflachen der Virialbeziehung in Abb.24 zu den leichten Systemen bzw. der etwas zu niedrige Virialfaktor von 1.8 für massereiche Systeme können dem

Einfluß der akkretierten Materie zugeschrieben werden. Besonderes Interesse wurde den Gruppen gewidmet, die eindeutig zu hohe Geschwindigkeitsdispersionen im Vergleich zur kinetischen Energie aufweisen. Diese Halos können mit Verschmelzungsprozessen identifiziert werden, welche zu deutlich anisotropen Systemen führen, die darüberhinaus stärker korreliert sind als die virialisierten Objekte. Dieses Ergebnis wird auch für die leuchtkraftstärksten Infrarot-Galaxien beobachtet (Gao 1993). Der Prozeß der Virialisierung selbst geht dabei sehr schnell von statten, was durch den geringen Prozentsatz der ungebundenen Halos zu allen Zeiten und die Verfolgung der Objekte vorwärts in der Zeit bestätigt wird. Im SCDM-Modell findet man die schnellste Entwicklung der Anzahldichte der Galaxienhaufen zu $z = 0$ hin und ebenso die höchste Rate an ungebundene Systemen. Auf der anderen Seite weisen realistischere Modell (ΛCDM und OCDM2) nur einen geringen Prozentsatz an solchen ungebundenen Systemen auf. Die stärkere Anisotropie der Verschmelzungsprodukte führt zu triaxialen Ellipsoiden mit einem typischen Achsenverhältnis von 1:0.4:0.3. Virialisierte Gruppen weisen im Vergleich dazu ein Achsenverhältnis von 1:0.7:0.5 auf, welches ebenfalls durch Beobachtungen und numerische Simulationen bestätigt werden kann (Frenk et al. 1988, Dubinsky 1992, Warren et al. 1992, Cole & Lacey 1996). Merger werden dabei von einem 'Transport des Drehimpuls' in die Außenbereiche des resultierenden Verschmelzungsprodukts begleitet (Barnes & Efstathiou 1987), was eine selbstähnliche Entwicklung der Spin-Parameter-Verteilung zur Folge hat.

Unterstrukturen stellen zwar einerseits eine Möglichkeit dar, um zwischen verschiedenen kosmologischen Modellen zu unterscheiden, andererseits ist solch ein Verfahren zur Diskriminierung stark von der Wahl der Parameter abhängig. Die von Dressler & Shectman (1988) eingeführte Methode zur Quantifizierung von Unterstrukturen in beobachteten Galaxienhaufen wurde in diesem Kapitel vorgestellt, an Hand von numerischen Simulationen kalibriert und auf Teilchengruppen in unterschiedlichen kosmologischen Modellen angewandt. Dabei konnte die Beobachtung, daß etwa 30% aller Galaxienhaufen Unterstrukturen aufweisen, reproduziert werden. Es konnte ebenso bestätigt werden, daß Verschmelzungsprodukte, die als nicht-virialisiert identifiziert worden sind, ein erhöhtes Maß an Strukturen zeigen und darüberhinaus verstärkt in kosmologischen Modellen mit einem hohen Wert für den Dichteparameter Ω_0 auftreten. Ein Vergleich der Delta-Abweichung mit der Multiplizitäts-Methode zur Quantifizierung von Unterstrukturen zeigte eine gute Übereinstimmung, jedoch mit einer starken Streuung, die im Einzelfall durch die inneren Eigenschaften der Objekte bzw. den Einfluß der Umgebung erklärt werden konnte.

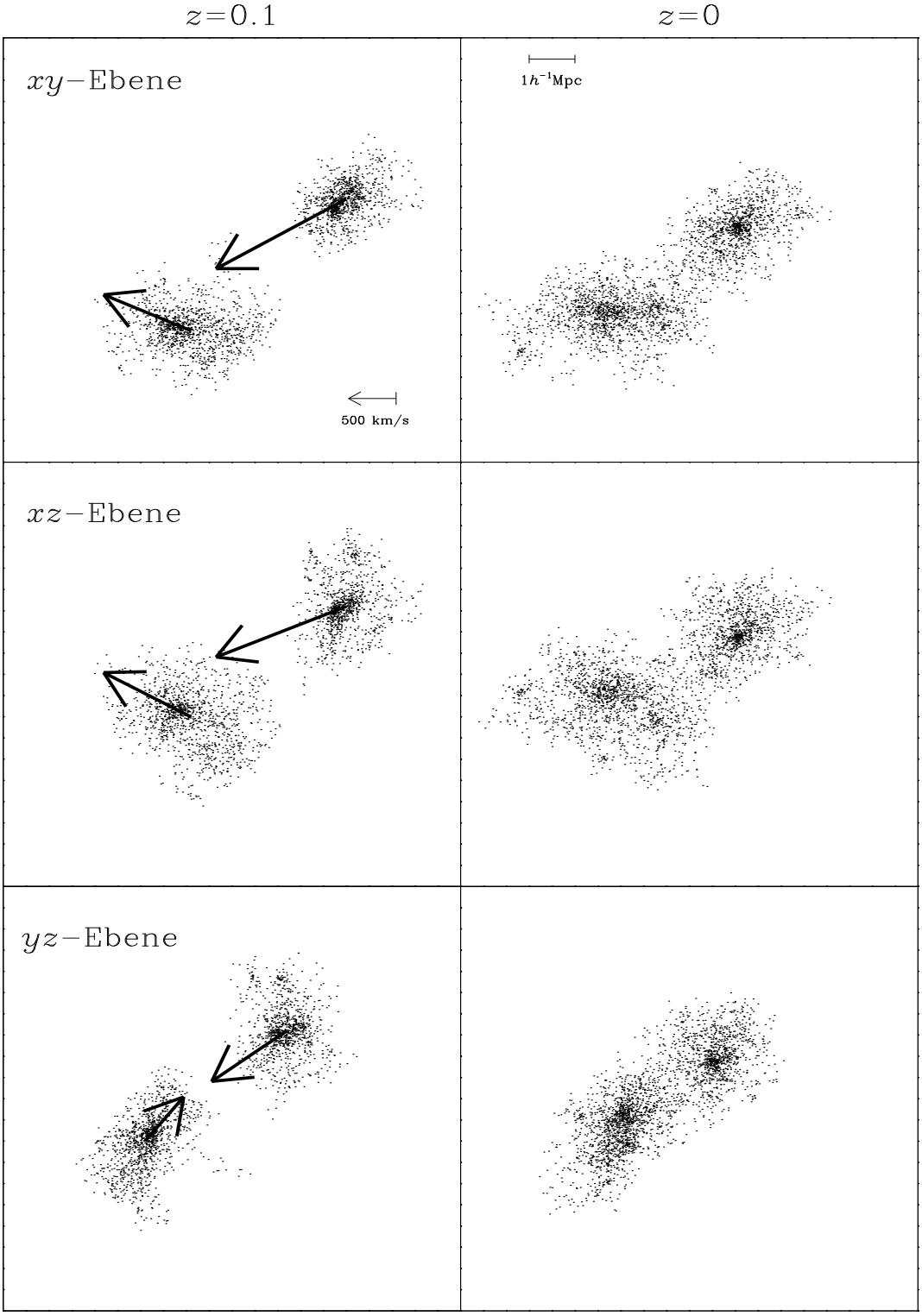


Abbildung 44: Visualisierung eines Verschmelzungsprozeß von $z = 0.1$ nach $z = 0$ im SCDM-Modell.

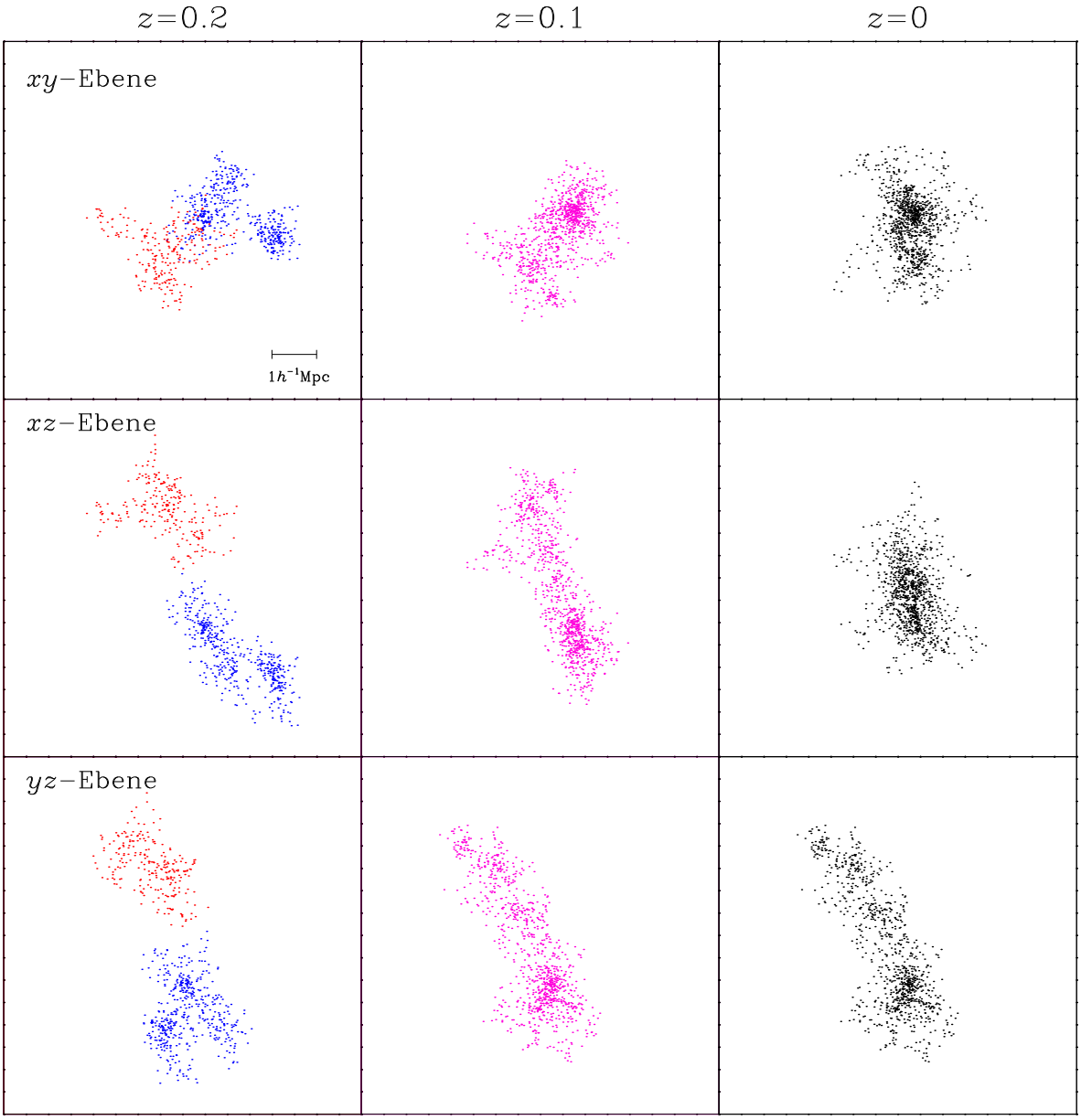


Abbildung 45: Visualisierung eines Verschmelzungsprozeß von $z = 0.2$ (zwei virialisierte Vorläufer) nach $z = 0.1$ (ungebundenes Verschmelzungsprodukt) nach $z = 0$ (relaxiertes Objekt) im SCDM-Modell.

Kapitel 6

Leerräume im Universum

In diesem Kapitel wird die Entstehung und Entwicklung von großen Leerräumen im Universum, den Voids, näher untersucht und dabei eine neue Methode zur Bestimmung des Bias-Parameters, wie er schon in Abschnitt 5.2.2 (vgl. Gl.(5.13), S.83) eingeführt worden ist, vorgestellt. Das Ziel dieser Methode ist die Reduktion des Powerspektrums der beobachteten Galaxienverteilung zu einem Powerspektrum der Dunklen Materie.

Die derzeit größten beobachteten Strukturen im Universum können mit Ansammlungen von Galaxienhaufen, kurz Super-Haufen, identifiziert werden, deren Ausdehnung in etwa 100 h^{-1}Mpc beträgt (z.B. Oort 1983, J.Einasto et al. 1997, M.Einasto et al. 1997). Diese Objekte sind dabei nicht als isoliert anzusehen; sie sind über Filamente, bestehend aus Galaxien bzw. Galaxienhaufen, miteinander verbunden (z.B. Geller & Huchra 1989, Linder et al. 1995). Allerdings existieren auch Bereiche im Universum, die von diesem Netzwerk großräumiger Strukturen umschlossen sind und so gut wie keine (leuchtende) Materie enthalten. Diese Regionen werden als Voids (Leerräume) bezeichnet. Unter der Annahme, daß die Gravitation die alles antreibende Kraft der Strukturbildung im Universum ist, so wie auch schon bei der Analyse im Kapitel 5 vorausgesetzt, fließt die Materie aus unterdichten Gebieten auf Grund der Anziehung in die überdichten Regionen, und es bilden sich jene Bereiche aus, die so gut wie keine leuchtende Materie enthalten. Dies ist zum einen durch numerische Simulationen (Dubinski et al. 1993), aber auch durch Beobachtungsdaten bestätigt worden (Freudling et al. 1991). Dabei muß natürlich darauf geachtet werden, in welcher Art und Weise man solch einen Leerraum definiert: Verwendet man Super-Haufen zur Abgrenzung von Voids, so findet man sicherlich noch einzelne kleinere Systeme bzw. Filamente innerhalb dieser 'Super-Voids'. Die Materie in den Voids entzieht sich jedoch weitestgehend den Beobachtungen, da es sich in erster Linie um Dunkle Materie handelt. Aber durch die Verwendung numerischer Simulationen, in denen ja gerade Dunkle Materie-Teilchen vorliegen, ist es möglich, diese Bereiche des Universums zu untersuchen. Hierbei zeigt sich, daß die unterdichten Gebiete von einer mehr oder weniger homogenen Verteilung von Teilchen bevölkert sind (vgl. Abb.46, rechts oben). Die genauen Eigenschaften und Strukturen der Voids sind in diesem Kapitel allerdings nicht von Belang; es kommt vielmehr auf eine Unterteilung in über- bzw. unterdichte Gebiete an, wobei sich der Bruchteil der Materie in unterdichten Regionen dazu verwenden läßt, das Verhältnis des Powerspektrums der beobachteten Galaxienverteilung zum

Spektrum der Dunklen Materie zu bestimmen (Einasto et al. 1994). Dieses Verfahren soll im folgenden vorgestellt und neue, hochaufgelöste Simulationen zur Reduktion des beobachteten Galaxienpowerspektrums verwendet werden.

6.1 Biasing

Die relative Verteilung von leuchtender und Dunkler Materie im Universum ist eines der größten ungelösten Probleme und von fundamentaler Bedeutung für die Kosmologie. Man versucht, die Unwissenheit über die genauen Entstehungsprozesse von Galaxien (leuchtender Materie) mittels eines sog. Biasing-Faktors zu parametrisieren:

$$P_g(k) = b_g^2(k)\ P_m(k)\ . \tag{6.1}$$

Hierbei handelt es sich bei $P_g(k)$ um das Spektrum der Galaxienverteilung, wie es etwa bei Einasto et al. (1998) aus Beobachtungen zusammengestellt wird, und $P_m(k)$ ist das gesuchte Powerspektrum der Materieverteilung. Die Verwendung des Faktor $b_g(k)$ ist nun eine einfache, aber trotzdem nützliche Methode, um das Verhältnis beider Spektren zu beschreiben und soll ebenfalls noch näher erläutert und untersucht werden. Der Ursprung dieses Parameters geht dabei zurück auf die Beobachtung, daß die Korrelationsfunktion von Galaxienhaufen gegenüber der von Galaxien eine stärkere Amplitude aufweist (Bahcall & Soneira 1983, Klypin & Kopylov 1983). Kaiser (1984) konnte das mit Hilfe der Theorie zu Gaußschen Fluktuationsfeldern erklären: Falls das Dichtefeld auf einer festen Skala geglättet und Dichtemaxima über einer gewissen Schwelle betrachtet werden, so erhält man eine Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion, die sich von der des ungeglätteten Feldes lediglich durch einen (konstanten) Zahlenfaktor unterscheidet. In der Arbeit von Bardeen et al. (1986) wurde dieses Verfahren dann vervollständigt und auf N-Punkt-Korrelationsfunktionen, Häufigkeitsverteilungen der (hohen) Dichtemaxima, sowie Profile derselben erweitert. Auch in einer der ersten Arbeiten zum SCDM-Modell unter Verwendung numerischer Simulationen (Davis et al. 1985) war die Einführung eines Bias-Faktors von 2.5 notwendig, um die Verklumpungseigenschaften der Dunklen Materie-Verteilung mit Beobachtungsdaten zu Galaxien in Einklang zu bringen. Im allgemeinen sollte man allerdings davon ausgehen, daß b_g bzw. $b_{\rm cl}$ eine Funktion der Wellenzahl k ist $b_g = b_g(k)$ (Kravtsov & Klypin 1998, und Referenzen darin).

Galaxienentstehung als Schwellenprozeß

Unter der Annahme, daß die Entstehung und Entwicklung von Strukturen im Universum in erster Linie von der Gravitation dominiert wird, ist es einleuchtend, daß sich die Materie in unterdichten Gebieten anders entwickelt als in überdichten. Die gravitative Wechselwirkung sorgt dafür, daß sich die Materie in Regionen hoher Dichte immer mehr ansammelt und somit auch eine immer größere Anziehung ausübt. Wird eine gewisse Grenzmasse erreicht, so setzt ein Gravitationskollaps ein (Jeans-Instabilität), der Grundbedingung für die Entstehung von Galaxien und auch Sternen ist. Hydrodynamische

Simulationen zeigen dabei deutlich, daß sich Galaxien nur in Gebieten hoher Dichte bilden können (Cen & Ostriker 1992 und 1998); lediglich hier findet die zur Sternentstehung notwendige Gas-Kühlung statt. In Regionen, deren Dichte einen gewissen Schwellenwert nicht überschreitet, sind die Voraussetzungen zur Ausbildung solcher Objekte nicht gegeben. Diese Überlegungen führen zwangsläufig zu dem Bild, Galaxienentstehung als einen Schwellenprozeß zu betrachten. Geht man noch einen Schritt weiter und setzt ebenso voraus, daß die Verteilung der Materie in den unterdichten Gebieten, den Voids, einen homogenen Beitrag zum allgemeinen Dichtefeld liefert, gelangt man (s.u.) zu einer einfachen Bestimmungsmethode des Bias-Parameters, die lediglich vom Bruchteil der Materie in den Voids abhängt und sich mit Hilfe numerischer Simulationen durchführen läßt.

Varianz der Galaxienverteilung

Die Grundidee des Verfahrens, ausgehend von einem skalenunabhängigen Biasing und einer homogenen Verteilung der Materie in den unterdichten Gebieten, ist die Verknüpfung von Beobachtungen zur Galaxienverteilung mit numerischen Simulationen, um das Powerspektrum der Dunklen Materie im Universum zu bestimmen. In der Arbeit von Einasto et al. (1998) wurde das Powerspektrum der Galaxienverteilung aus aktuellen Beobachtungsdaten zusammengestellt, welches nach Gl.(A.30) im Anhang A.5 (S.133)dazu verwendet werden kann, die Varianz von Galaxienzählungen auf einer Skala von $8h^{-1}$Mpc $(\sigma_8)_g$ (kurz σ_g) zu berechnen:

$$\sigma_g = 0.89 \pm 0.05 \,. \tag{6.2}$$

Die Definition des Biasing-Parameters Gl.(6.1) läßt sich unter der Annahme der Skalenunabhängigkeit $b_g(k) \equiv b_g$ mittels Gl.(A.30) ebenfalls als Verhältnis der Varianzen des geglätteten Feldes σ_g und σ_m ausdrücken:

$$\sigma_g = b_g \, \sigma_m \,, \tag{6.3}$$

was zusammen mit Gl.(6.2) eine Beziehung zwischen σ_m und b_g ergibt. Wenn man nun in der Lage ist, einen zweiten, unabhängigen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen zu finden, kann man den Bias-Parameter einfach über den Schnittpunkt dieser beiden Kurven bestimmen.

Materieanteil in unterdichten Gebieten

Unterteilt man die Gesamtdichte des Universums in einen Anteil, der durch die Materie in unterdichten Gebieten (Voids) und einen Anteil, der durch die restliche Materie bestimmt ist:

$$\rho_m = \rho_g + \rho_v \,, \tag{6.4}$$

wobei sich die Indizes m, g und v auf (Gesamt-)Materie, Materie in dichten Regionen (Galaxien und Galaxienhaufen), sowie auf die unterdichten Bereiche (Voids) beziehen, so läßt sich in diesem Fall der Dichtekontrast wie folgt formulieren:

$$\delta_m = \frac{\rho_m - \overline{\rho}_m}{\overline{\rho}_m} = \frac{\rho_g + \rho_v - (\overline{\rho}_g + \overline{\rho}_v)}{\overline{\rho}_g + \overline{\rho}_v} \ . \tag{6.5}$$

Geht man nun zusätzlich davon aus, daß die Verteilung der Materie in den Voids homogen ist $\rho_v = \overline{\rho}_v$, so wie es u.a. durch numerische Simulationen (vgl. Abb.46) bestätigt wird, gelangt man zu:

$$\delta_m = \frac{\overline{\rho}_g}{\overline{\rho}_m} \ \delta_g = F_g \ \delta_g \ . \tag{6.6}$$

Die Größe F_g beschreibt in diesem Fall den Bruchteil der Materie *außerhalb* der Voids, der sich über den Anteil der Materie *in* den Voids bestimmen läßt:

$$F_g = 1 - F_v \ . \tag{6.7}$$

Übersetzt man Gl.(6.6) ebenfalls in den Formalismus des Powerspektrums, so erhält man einen Zusammenhang, der eine Identifikation von $1/F_g$ mit dem Bias-Faktor erlaubt:

$$P_m(k) =< |\delta_m(k)|^2 >= F_g^2 \ P_g(k) \ . \tag{6.8}$$

Diese Gleichung zeigt, daß das 'Abziehen' einer homogenen Verteilung ρ_v vom Dichtefeld ρ_m zu einer Erhöhung der Amplitude des entsprechenden Powerspektrums führt, wobei die Gestalt des Spektrums jedoch erhalten bleibt. Vergleicht man die Beziehung (6.8) nun mit der Definition des Bias-Parameters (6.1), so erkennt man:

$$b_g = \frac{1}{F_g} \tag{6.9}$$

Der Bruchteil der Materie in den unterdichten Regionen legt also unter der Annahme eines skalenunabhängigen Biasing *und* einer homogenen Verteilung der Void-Materie das Verhältnis zwischen den Powerspektren der Galaxienverteilung und der Dunklen Materie fest.

Bestimmung des Bias-Parameters

Unter Verwendung numerischer Simulationen (und einer angemessen Definition für Voids) ist es nun möglich, den Wert F_g direkt in Abhängigkeit von σ_m zu bestimmen, was in Verbindung mit Gl.(6.3) zur Bestimmung des Bias-Parameters b_g herangezogen werden kann:

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{1}{\sigma_g} \ \sigma_m \quad (\text{mit } \sigma_g \text{ nach Gl.(6.2)}) \\ F_g &= f(\sigma_m) \quad (\text{Simulationen}) \end{aligned} \tag{6.10}$$

In die erste Beziehung geht dabei der Wert für σ_g ein, der aus dem beobachteten Powerspektrum der Galaxienverteilung gewonnen werden kann. Die zweite Beziehung muß im

folgenden mit Hilfe numerischer Simulationen bestimmt werden und liefert einen zweiten Zusammenhang zwischen Bias $b_g = 1/F_g$ und σ_m, der eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems (6.10) zuläßt.

6.2 Voids in numerischen Simulationen

Definition von Voids

Es wurden erneut die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Simulationen zur Bestimmung des Bruchteils der Materie in Voids herangezogen (vgl. Tabelle 1, S.20). Dabei blieb bis jetzt die Frage ungeklärt, nach welchem Kriterium man die Gesamtmaterie in die beiden Anteile ρ_g und ρ_v aufzuteilen hat, d.h. man muß einen Grenzwert ρ_c einführen, der eine eindeutige Unterscheidung erlaubt:

$$\rho_v \leq \rho_c < \rho_g \ . \tag{6.11}$$

Das wahre, kontinuierliche Dichtefeld der Materieverteilung im Universum wird dabei einerseits in numerischen Simulationen durch das Teilchenbild diskretisiert, andererseits aber ebenso durch die Verwendung von Beobachtungen zu Galaxien. Um nun zu einem kontinuierlichen Dichtefeld zu gelangen, muß die Materieverteilung (in der Simulation) auf einer Skala geglättet werden, die der Größe von Galaxien entspricht. Da sich Galaxien bevorzugt in kleineren Gruppen bilden, deren Ausdehnung in etwa $1h^{-1}$Mpc beträgt, wird zur Bestimmung des Dichtefelds (s.u.) ein Verfahren angewandt, welches einer Glättung des Dichtefelds auf eben dieser Skala entspricht. Hydrodynamische Simulationen der Galaxienbildung, in denen das Dichtefeld ebenfalls auf dieser Skala geglättet wurde, zeigen nun, daß die Verteilung der Galaxien im Universum auf die Bereiche beschränkt bleibt, in denen die Dichte ρ größer als die mittlere Dichte $\overline{\rho}$ ist (Cen & Ostriker 1992 und 1998). Aus diesem Grund werden die Gebiete mit $\rho/\overline{\rho} < 1$ als Voids bezeichnet und alle Teilchen in diesen Regionen bestimmen den Bruchteil der Materie, der über Gl.(6.10) zur Festlegung des Bias-Parameter herangezogen werden kann:

$$\rho_c = \overline{\rho} \quad \Rightarrow \quad F_g = F\left(\rho/\overline{\rho} > 1\right) \ . \tag{6.12}$$

Lokale Dichte

Als nächstes stellt sich die Frage der detaillierten Zuordnung der Teilchen in die Gebiete 'Void' und 'Nicht-Void', was zur Bestimmung des Bruchteils der Materie in den Voids von entscheidender Bedeutung ist. Zu diesem Zweck wurde an jedem Teilchenort die lokale Dichte über die Anzahl der 12 nächsten Nachbarn bestimmt; dies entspricht in etwa einer Glättungsskala des Dichtefelds von $1.5h^{-1}$Mpc, was ungefähr mit der Größe von Galaxiensystemen übereinstimmt (s.o.). Zu diesem Zweck werden um jedes Teilchen sukzessiv größer werdende Kugel-Sphären gelegt, und zwar so lange, bis in der Sphäre mindestens 12 Teilchen enthalten sind. Die Dichte errechnet sich dann einfach als Anzahl der im Endeffekt umschlossenen Teilchen dividiert durch das Kugelvolumen. Es ist natürlich darauf

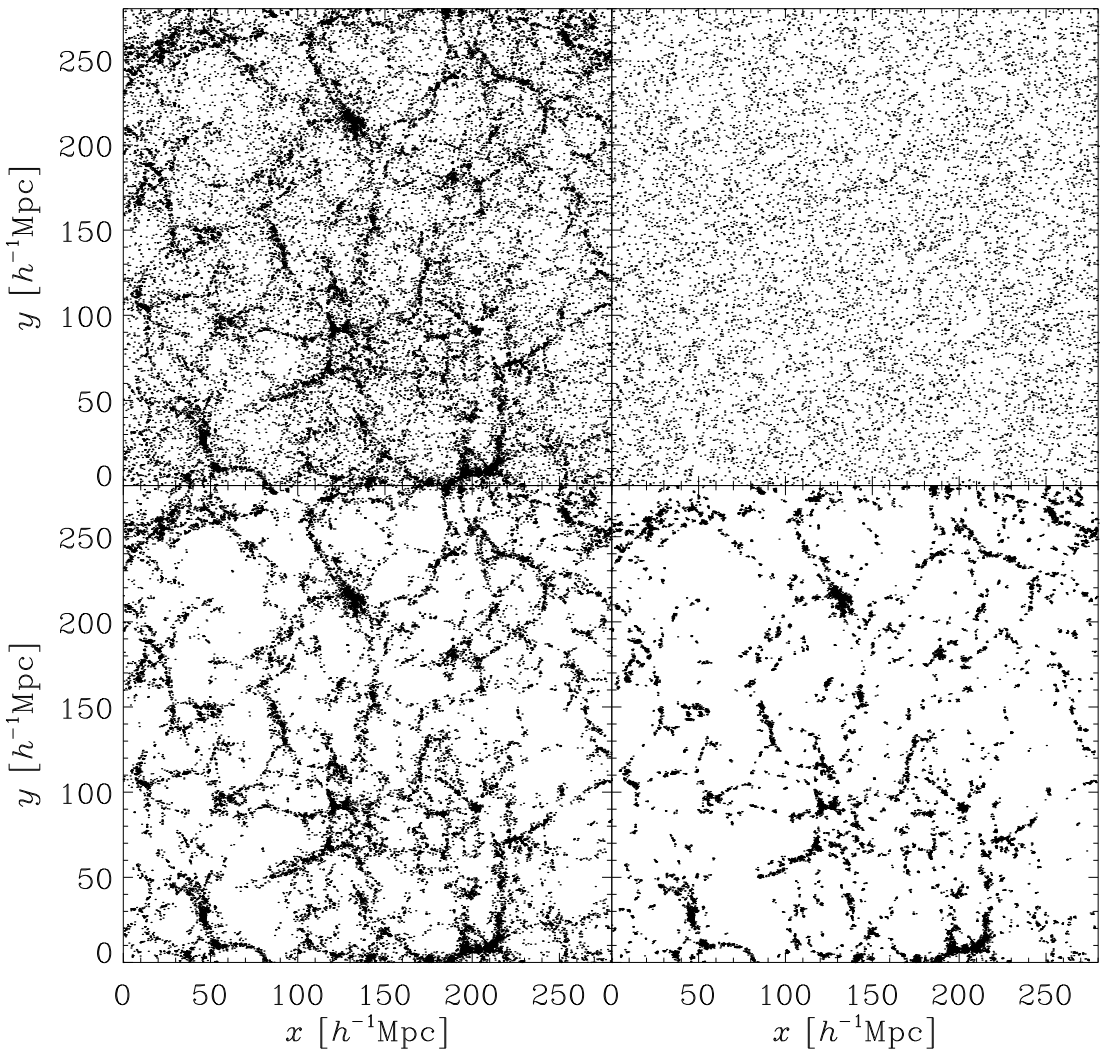


Abbildung 46: Schnitt der Dicke $15h^{-1}$Mpc durch die Simulationsbox im ΛCDM-Modell (vgl. Abb.8, S.35). Links oben sind alle Teilchen abgebildet, rechts oben nur die Void-Teilchen $\rho/\overline{\rho} \leq 1$, links unten Teilchen mit einer lokalen Dichte $\rho/\overline{\rho} > 1$ und rechts unten diejenigen, für die $\rho/\overline{\rho} > 5$ gilt.

zu achten, daß die Vergrößerung der Kugelvolumina in möglichst kleinen Schritten zu erfolgen hat. In den hier vorgestellten Fällen betrug der Wert für $\Delta r = 0.1h^{-1}$Mpc, was dem doppelten der Auflösung der Simulationen entspricht.

Zur Veranschaulichung ist in Abb.46 derselbe Schnitt durch das ΛCDM-Modell wie auch schon in Abb.8 (S.35) gezeigt. Links oben sind dabei alle Teilchen, die sich in dem Schnitt befinden, in Projektion gezeigt, wohingegen rechts oben nur die Void-Teilchen $\rho/\overline{\rho} \leq 1$ abgebildet sind; man erkennt, daß sie nahezu homogen verteilt sind. Im linken unteren Bild sind die Teilchen aufgezeigt, an deren Position die lokale Dichte den Wert der mittleren Dichte überschreitet $\rho/\overline{\rho} > 1$. Abschließend befinden sich in der rechten unteren

Abbildung nur die Teilchen, deren Dichte das Kriterium $\rho/\overline{\rho} > 5$ erfüllen. Die Erhöhung des Schwellenwertes für die lokale Dichte zeigt deutlich, daß man sich dadurch auf immer kompaktere Objekte (Galaxienhaufen) beschränkt. Ein direkter Vergleich mit Abb.8 zeigt dabei, daß die FOF-Gruppen, die dort rot markiert sind, in etwa aus den Teilchen bestehen, die in Abb.46 der Bedingung $\rho/\overline{\rho} > 5$ genügen.

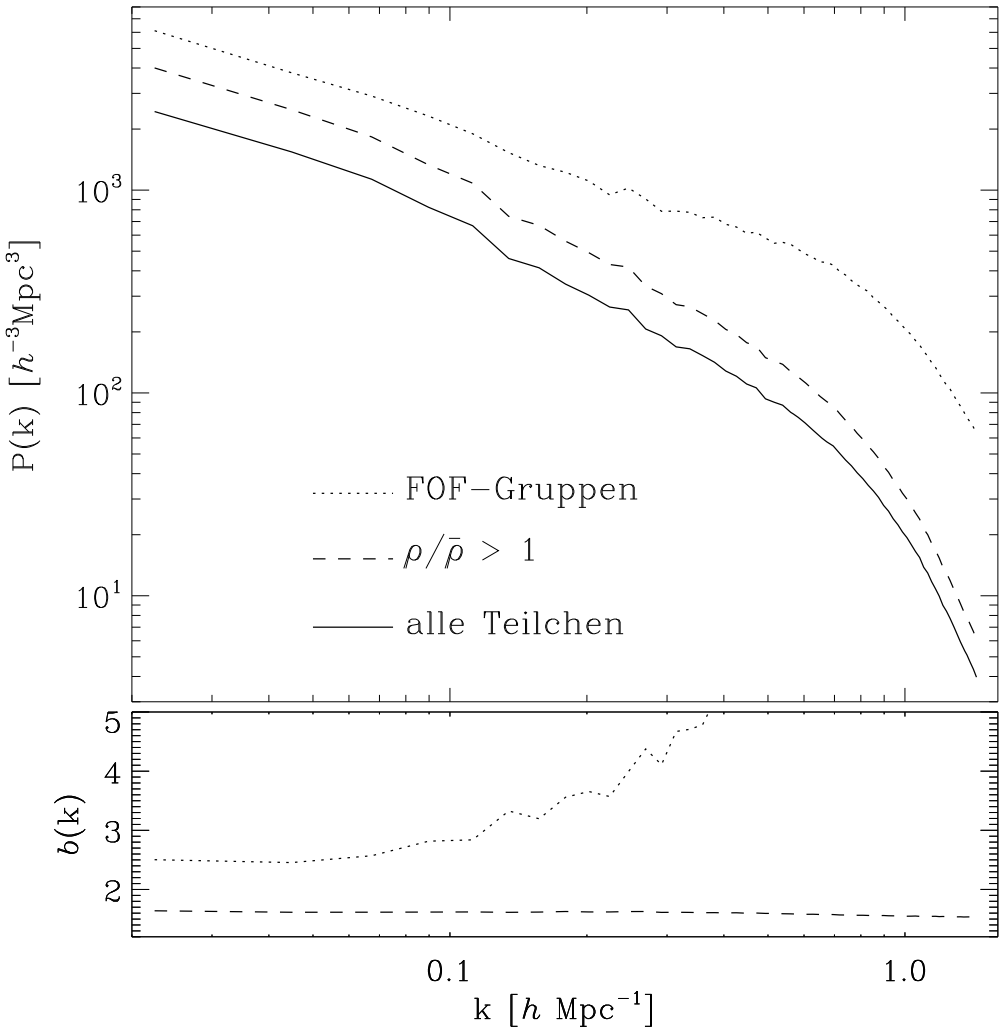


Abbildung 47: Powerspektren der Dunklen Materie-Teilchen im Vergleich zu FOF-Gruppen.

Powerspektren

Zur Verdeutlichung des Biasing-Phänomens sind in Abb.47 die Powerspektren der in Abb.46 gezeigten Teilchen aufgetragen. Die durchgezogene Linie entspricht dabei dem Spektrum *aller* Teilchen in der Simulation, die gestrichelte Linie basiert auf den Teilchen mit einer Dichte $\rho/\overline{\rho} > 1$ und die gepunktete Linie ist das Powerspektrum von FOF-

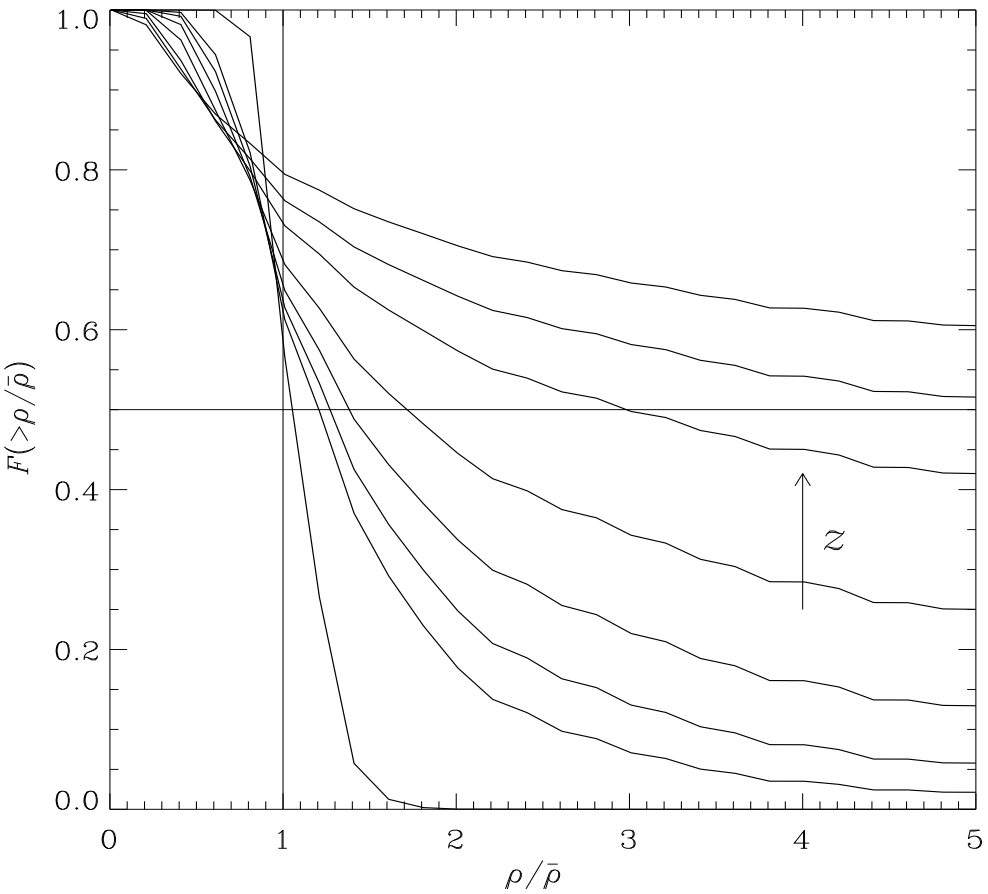


Abbildung 48: Ausbildung der Voids im ΛCDM-Modell. Es ist der Bruchteil der Materie $F(>\rho/\overline{\rho})$ gegen die (lokale) Dichte $\rho/\overline{\rho}$ für die Rotverschiebungen $z = 25, 5, 4, 3, 2, 1, 0.5$ und 0 aufgetragen.

Gruppen ($ll = 0.16$, vgl. Tabelle 2). Im unteren Teil des Bildes ist das Verhältnis $b(k)$ der beiden erhöhten Spektren zum Dunkle Materie-Spektrum aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß man bei der Berücksichtigung der 'Galaxienpopulation' $\rho/\overline{\rho} > 1$ ein nahezu konstantes Biasing erhält, so wie es bei der Ableitung der Beziehung $b_g = 1/F_g$ vorausgesetzt wurde. Lediglich wenn man zur Korrelation der Teilchengruppen übergeht, die sich an den seltenen, sehr hohen Dichtemaxima ausgebildet haben, beobachtet man einen nicht-linearen Zusammenhang, so wie er für solche Objekte auch in anderen Arbeiten beobachtet wird (z.B. Jenkins et al. 1998, Kravtsov & Klypin 1998).

6.3 Bildung der Voids

Wie in Abschnitt 6.1 gezeigt wurde, kann man zur Bestimmung des Bias-Parameters die Entwicklung der Materie in den unterdichten Gebieten verwenden (vgl. Gl.(6.10)). In

diesem Abschnitt sollen nun die numerischen Simulationen zur Reduktion des Powerspektrums der beobachteten Galaxienverteilung bzw. zur Bestimmung des Bias-Parameters b_g verwendet werden. In Abb.48 ist dazu die Bildung der unterdichten Gebiete an Hand der Abhängigkeit $F(>\rho/\overline{\rho})$ (dem Bruchteil von Teilchen mit einer lokalen Dichte $>\rho/\overline{\rho}$) von $\rho/\overline{\rho}$ für verschiedene Zeitpunkte in der ΛCDM-Simulation aufgezeigt. Man entnimmt dieser Abbildung, daß zu frühen Zeiten die Materie ungefähr zur Hälfte in Voids $\rho/\overline{\rho} \leq 1$ und zur anderen Hälfte in Gebieten $\rho/\overline{\rho} > 1$ zu finden ist. Das entspricht auch genau den Erwartungen, da zufällige Fluktuationen der Materieverteilung, mit denen man es im frühen Universum zu tun hat, zu einer 'Gleichverteilung' in Gebiete mit $\rho > \overline{\rho}$ und $\rho \leq \overline{\rho}$ führen. Die Gravitationswechselwirkung sorgt dann erst im Laufe der Zeit dafür, daß die Materie aus den Voids in die Regionen hoher Dichte abgezogen wird. Und genau dies wird auch in Abb.48 beobachtet; die Voids werden immer leerer, und die Teilchen sammeln sich in Bereichen hoher Dichte, was einem Anwachsen von $F(>\rho/\overline{\rho})$ entspricht. Zur besseren Übersicht sind in dem Bild noch die Linien $F = 0.5$ (Gleichverteilung) und $\rho/\overline{\rho} = 1$ (Grenze für Voids) eingezeichnet.

Der wichtigste Zusammenhang ist jedoch in Abb.49 gezeigt. Hier ist die Funktionen $F_g = f(\sigma_8)$ für verschiedene kosmologische Modelle *und* unter Verwendung unterschiedlicher Realisationen des Eingangs-Powerspektrums abgebildet. Es standen neben den üblicherweise verwendeten Startpositionen, ausgehend von den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Glas-Verteilungen, ebenfalls Durchläufe zur Verfügung, bei denen die homogene und isotrope Verteilung durch ein regelmäßiges Gitter repräsentiert wird (vgl. Abb.4, S.26). Für das ΛCDM-Modell lag zusätzlich noch ein Durchlauf vor (ΛCDM, Glas #2), bei dem die Phasen bei der Realisation des Powerspektrums im Vergleich zum Durchlauf 'Glas #1' abgeändert worden sind. Man beobachtet in dieser Abbildung eine Abhängigkeit vom kosmologischen Modell, wobei allerdings darauf hingewiesen werden muß, daß die Schwankungen der Realisationen ein und desselben Modells von der gleichen Größenordnung wie die Unterschiede der Modelle untereinander sind. Die Durchläufe, die von Gitterplätzen gestartet worden sind, liegen dabei systematisch unterhalb der entsprechenden Kurven für Glas-Startplätze. Dies bedeutet, daß in diesen Durchläufen die Bildung der Voids (vom anfänglichen Verhältnis 1:1 weg) weniger effektiv erfolgt. Allerdings beobachtet man auch bei den beiden ΛCDM-Simulationen, die sich lediglich in den Phasen bei der Realisation des Powerspektrums unterscheiden, einen signifikanten Unterschied in der Amplitude. Die absoluten Schwankungen bewegen sich im Endeffekt jedoch nur in einem Bereich von 11% um den Mittelwert

$$F_g = 0.75 \pm 0.08 \,. \tag{6.13}$$

Dies liefert im Zusammenhang mit Gl.(6.9) für den Bias-Parameter der Galaxienverteilung gegenüber der Dunklen Materie:

$$b_g = 1.32 \pm 0.13 \quad \text{und} \quad \sigma_m = 0.68 \pm 0.09 \,. \tag{6.14}$$

Diese beiden Werte stimmen trotz des komplett neuen Zugangs bei der Berechnung sehr gut mit den Ergebnissen anderer Arbeiten überein. Eke et al. (1996b, 1998) benutzen zur Bestimmung von σ_m die Entwicklung der Häufigkeit von Galaxienhaufen, die

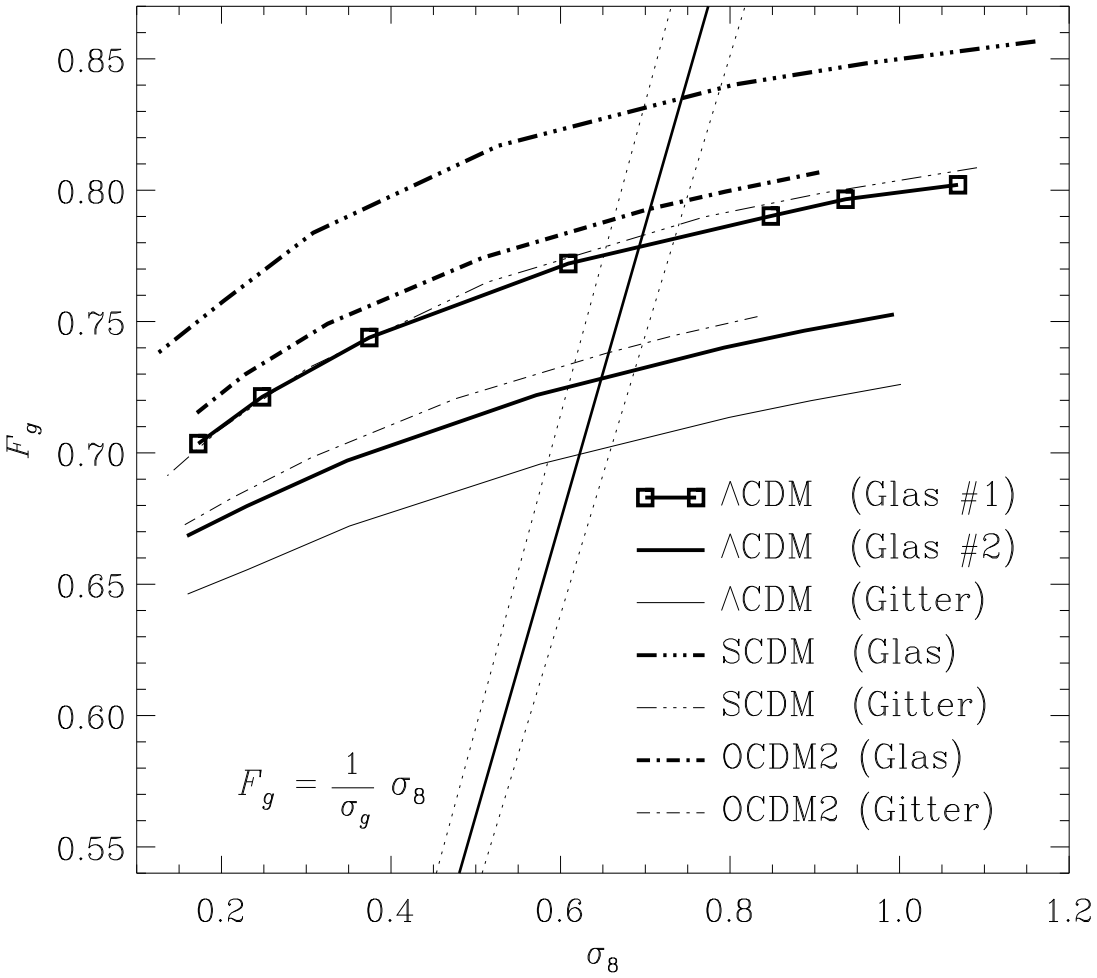


Abbildung 49: Zusammenhang zwischen dem Bruchteil der Materie F_g in Gebieten $\rho > \overline{\rho}$ und der Varianz der Massenfluktuationen σ_8. Die durchgezogene Linie $F_g = \sigma_8/\sigma_g$ beschreibt den Zusammenhang nach Gl.(6.3) unter Verwendung des beobachteten Wertes $\sigma_g = 0.89$, wobei die gestrichelten Linien links und rechts davon die Fehlergrenzen kennzeichnen.

ein Aufbrechen der Entartung $\sigma_m\sqrt{\Omega_0} \simeq 0.5$ erlaubt (vgl. Abschnitt 5.2.2). Sie erhalten $\sigma_m \simeq 0.67 - 0.74$ (in Abhängigkeit von Λ). Bahcall et al. (1997) verwenden ebenfalls die Entwicklung der Clusterhäufigkeit und erhalten $\sigma_m \simeq 0.85 \pm 0.15$, was sich ebenfalls mit dem hier vorgestellten Ergebnis überschneidet. Neuere Abschätzungen, denen Beobachtungsdaten zu Galaxienhaufen bis zu einer Rotverschiebung von $z > 0.5$ zu Grunde liegen, liefern hingegen $\sigma_m = 1.2^{+0.5}_{-0.4}$ (Bahcall & Fan 1998), wobei jedoch auf den relativ großen Fehlerbereich hingewiesen werden muß.

6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Verfahren vorgestellt, mit dem sich unter Verwendung des Bruchteils der Materie in Voids – gewonnen aus numerischen Simulationen – das Powerspektrum der beobachteten Galaxienverteilung (Einasto et al. 1998) zum Spektrum der Dunkle Materie-Verteilung reduzieren läßt. Dabei wurde davon ausgegangen, daß zum einen der Entstehung und Entwicklung von Strukturen und Objekten im Universum die Gravitation zugrunde liegt und zum anderen die Bildung von Galaxien bzw. leuchtender Materie als ein Schwellenprozeß angesehen werden kann; es ist möglich, die Materie in eine Void-Population sowie einen Anteil in überdichten Regionen einzuteilen, wobei Materie kontinuierlich aus unterdichten Gebieten in die Bereiche hoher Dichte fließt, in denen die Voraussetzungen für Stern- und Galaxienentstehung gegeben sind (Cen & Ostriker 1992 und 1998). Der Bruchteil der Materie in den Voids legt somit unter der Annahme einer homogenen Verteilung und eines skalenunabhängigen Biasing das Verhältnis zwischen den Powerspektren der leuchtenden Materie ($\rho/\overline{\rho} > 1$) und der Gesamtmaterie fest. Die hier vorgestellte Methode zur Bestimmung des Powerspektrums der Materieverteilung im Universum basiert auf der direkten Beobachtung des Galaxienpowerspektrums und der Verwendung numerischer Simulationen, mit deren Hilfe die 'Entleerung' der Voids untersucht werden kann. Es wurde gezeigt, daß die Spektren von Galaxien in erster Linie nur in der Amplitude vom Spektrum der gesamten Materie abweichen, die Gestalt aber so gut wie erhalten bleibt (vgl. Abb.47). Dies rechtfertigt die Annahme eines skalenunabhängigen Bias-Mechanismus nach Gl.(6.3), der in Verbindung mit der aus Simulationen gewonnenen Kurve $F_g(\sigma_m)$ eine eindeutige Bestimmung von sowohl $b_g = 1/F_g$ als auch σ_m zuläßt. Die Funktion $F_g(\sigma_m)$ ist dabei (schwach) modellabhängig; für einen hohen Wert des Dichteparameters Ω_0 geht die Entleerung der Voids schneller vonstatten, was sich in einem höheren Wert für F_g zum heutigen Zeitpunkt widerspiegelt. Allerdings ist die genaue Definition des *heutigen* Zeitpunkts in Simulationen an sich ein Problem. Dies konnte jedoch durch die Verwendung der zweiten Beziehung (vgl. Gl.(6.3)) zwischen F_g und σ_m über die beobachtete Varianz der Galaxienverteilung σ_g vermieden werden, da sich in diesem Fall das Gleichungssystem (6.10) eindeutig lösen ließ. Die Varianz der Massenverteilung bestimmt sich auf diese Art und Weise zu $\sigma_m = 0.68 \pm 0.09$, was einen Wert für den Bias-Parameter von (leuchtender) Materie in überdichten Regionen zur gesamten Materie $b_g = 1.3 \pm 0.13$ liefert. Dieser Wert stimmt sehr gut mit den Ergebnissen anderer Untersuchungen überein (z.B. Bahcall et al. 1997, Eke et al. 1998), obwohl die hier vorgestellte Methode auf einem komplett neuen Zugang bei der Berechnung des Bias-Parameters basiert.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

An dieser Stelle sollen die in der Arbeit gewonnen Erkenntnisse und Ergebnisse zusammengefaßt und mögliche Erweiterungen kurz angesprochen werden.

Das Ziel der vorliegenden Dissertation war die Untersuchung der Entstehung und Entwicklung von Galaxiengruppen und Galaxienhaufen in numerischen Simulationen. Zu diesem Zweck wurde in den Kapiteln 3 und 4 ein besonderer Schwerpunkt auf solche Verfahren selbst gelegt. In den darauffolgenden Kapiteln 5 und 6 lagen dann Rechnungen zu verschiedenen kosmologischen Modellen vor, die im Detail auf die Eigenschaften von Teilchengruppen und der Verteilung der Dunklen Materie in unterdichten Gebieten hin untersucht worden sind. Es wurde besonderer Wert auf die Virialisierung dieser Objekte und die Quantifizierung von Unterstrukturen gelegt. Der Bruchteil der Materie in den Voids, d.h. in den Bereichen, in denen *keine* Galaxienhaufen zu finden sind, wurde zur Reduktion des beobachteten Galaxienpowerspektrums zu einem Dunkle Materie-Spektrum, d.h. zur Bestimmung des Bias-Parameters, verwendet.

Bei all diesen Untersuchungen blieben einige Fragen ungeklärt, auf die in der nun folgenden detaillierten Zusammenfassung der einzelnen Kapitel ebenfalls eingegangen und mögliche Verfahren zur Beantwortung kurz skizziert werden.

Auflösungseffekte in numerischen Simulationen

Es wurden drei unterschiedliche N-Body-Codes zur Simulation eines SCDM-Modells mit jeweils identischen Startverteilungen herangezogen. Es handelt sich hierbei zum einen um den AP^{3}M-Code von Couchman (1991), der ebenfalls als reiner PM-Code verwendet wurde, und zum anderen um den ART-Code von Kravtsov et al. (1997). Die Codes unterscheiden sich dabei in erster Linie durch die Art und Weise, wie die Bewegungsgleichungen (Gl.(3.15), S.28) integriert werden. Dies hat allerdings wenig Einfluß auf die Eigenschaften der identifizierten Teilchengruppen. Eine stärkere Bedeutung kann der räumlichen Auflösung zugeschrieben werden, da die Durchläufe, die mit dem PM-Code gerechnet wurden, in jedem Fall zu keinen vergleichbaren Ergebnissen auf kleinen Skalen führten. Ebenso muß man bei dem AP^{3}M-Code, der die Wechselwirkung der Teilchen für kleine Abstände mit Hilfe der direkten Summation (vgl. Abschnitt 3.3.2) bestimmt, auf ein abgestimmtes Verhältnis zwischen Softening-Parameter und der Integrationsschrittweite

achten, da es ansonsten zu unerwünschten engen Stößen und somit zu einer Verletzung des Energiesatzes und des Flüssigkeitsbildes und kommen kann (vgl. Abb.12 und Abb.14, S.51). Es wurde gezeigt, daß die Trajektoren der Teilchen innerhalb von Haufen chaotisch verlaufen und im Detail nicht mehr nachvollziehbar bzw. vergleichbar sind; in den unterdichten Regionen allerdings zeigt ein direkter Vergleich unterschiedlicher Durchläufe eine gute Übereinstimmung (vgl. Abb.11, S.50). Innerhalb der Teilchengruppen findet man eine Streuung, die in etwa der Ausdehnung der untersuchten Objekte entspricht, wobei eine weitere Auswertung zeigt, daß die Gruppen sogar zu 85% aus denselben Teilchen aufgebaut sind. Die physikalischen Eigenschaften dieser Systeme sind ebenfalls kaum unterscheidbar, was für die Verläßlichkeit der untersuchten numerischen Simulationen spricht.

Galaxienhaufen in Simulationen

In Kapitel 5 wurden Galaxienhaufen in den Simulationen vier kosmologischer Modelle im Hinblick auf Virialisierung und Unterstrukturen untersucht. Da in den hier vorgestellten Rechnungen lediglich Dunkle Materie simuliert wurde, ist die Grundvoraussetzung die gerechtfertigte Annahme, daß Galaxien bevorzugt an Stellen entstehen, wo sich die größten Ansammlungen Dunkler Materie finden lassen.

Es konnte gezeigt werden, daß der Virialsatz von der Mehrheit der identifizierten Galaxienhaufen erfüllt wird. Allerdings erhält man bei einer Anpassung an den linearen Zusammenhang $E_{\mathrm{kin}} = \alpha E_{\mathrm{pot}}$ eine Steigung $\alpha \approx 1.8$, was sich auf den Einfluß akkretierter Materie zurückführen läßt; sie wirkt wie ein von außen auferlegter Druck, der zu einer Erhöhung der Geschwindigkeitsdispersion führt. Es werden jedoch auch Systeme gefunden, die eine zu hohe Geschwindigkeitsdispersion im Vergleich zur kinetischen Energie aufweisen. Hierbei handelt es sich in erster Linie um Verschmelzungsprozesse von zwei (oder mehr) Vorläuferobjekten. Dies wird zum einen durch die starke Anisotropie dieser Systeme begründet (vgl. Abb.28, S.78), zum anderen aber auch dadurch, daß in der Mehrzahl der Fälle zu einem früheren Zeitpunkt zwei annähernd gleichgroße Vorläufer identifiziert werden konnten, die mit einer hohen Relativgeschwindigkeit einen nicht-zentralen Stoß vollziehen (vgl. Tabelle 9 und Tabelle 10, S.81). Der Prozeß der Virialisierung selbst geht dabei schnell von statten, wie an Hand von Tabelle 11 (S.82) deutlich wird. Allerdings bleibt die Frage offen, weshalb der Prozentsatz der unvirialisierten Objekte im SCDM-Modell im Laufe der Zeit zunimmt, wohingegen er in allen anderen Modellen annähernd konstant bleibt. Weiterhin weisen gerade die nicht-virialisierten Objekte eine starke räumliche Korrelation auf (vgl. Abb.31, S.83), wie sie ebenfalls bei den leuchtkraftstärksten Infrarot-Galaxien beobachtet wird. Merger-Ereignisse, die vermutlichen Ursachen für die hohen Infrarot-Leuchtkräfte von bis zu $10^{12} L_{\odot}$ angesehen werden, finden bevorzugt in den überdichten Regionen statt, was auch in den hier vorgestellten Simulationen der Fall ist (vgl. Abb.32, S.86).

Im Abschnitt 5.3 wurde dann ein Verfahren zur Quantifizierung von Unterstrukturen in Galaxienhaufen auf die numerischen Simulationen angewandt. Unterstrukturen geben einen direkten Hinweis auf eine starke Wechselwirkung mit der Umgebung bzw. auf die schon erwähnten Verschmelzungsprozesse. Ebenso erwartet man eine Abhängigkeit der

Häufigkeit von Unterstrukturen vom kosmologischen Modell, da sich in einem Universum mit einem kleinen Wert für den Dichteparameter Ω_0 die Objekte früher ausbilden und somit mehr Zeit zur Virialisierung haben. Solch ein Verhalten wird zwar auch in den hier vorgestellten numerischen Simulationen beobachtet (vgl. Tabelle 15), jedoch hängt dieser Effekt (genau wie der Gesamtprozentsatz von Haufen mit Unterstruktur) stark von der Wahl des Grenzwerte für die Delta-Abweichung Δ/N ab. Unabhängigkeit davon zeigt sich bei den als 'nicht-virialisiert' identifizierten Teilchengruppen eine starke Tendenz zum Auftreten von Unterstrukturen. Dies bestätigt erneut, daß es sich bei diesem Objekten um Verschmelzungsprodukte handelt (vgl. Abb.41, S.101). Allerdings ist das Verfahren durch die 'willkürlich' festgelegte Grenze für Δ/N nur bedingt mit anderen Unterstrukturidentikatoren vergleichbar (vgl. Abb.42). Für den hier gewählten Grenzwert $\Delta/N = 1.4$ lassen sich zwar die beobachteten Häufigkeiten von Strukturen in Galaxienhaufen reproduzieren, aber dieser Wert müßte durch weitere Vergleichsmöglichkeiten noch besser begründet werden. Die Berechnung der Delta-Abweichung basiert zwar auf einer Mittelung über 100 verschiedene Projektionen, jedoch steht ein Vergleich mit einer Berechnung, basierend auf der kompletten dreidimensionalen Information, ebenfalls noch aus. Erst dann wird vielleicht die Korrelation zwischen diesem Verfahren und z.B. der Multiplizität, die auf der dreidimensionalen Verteilung der Teilchen beruht, verbessert. Davon abgesehen konnte aber gezeigt werden, daß die Verwendung der Delta-Abweichung ein gutes Maß zur Quantifizierung von Unterstrukten darstellt: Die Methode basiert ausschließlich auf dynamischen Aspekten, wobei es nicht notwendig ist, 'Vorab-Annahmen' über die Geometrie und die Position von Unterstrukturen zu machen.

Leerräume im Universum

Unter der einfachen Annahme, daß die Verteilung der Materie in den unterdichten Regionen, in denen (so gut wie) keine Galaxienentstehung stattfindet (Cen & Ostriker 1992 und 1998), als homogen angesehen werden kann, ist es möglich, das Verhältnis zwischen Dunkler Materie und der Galaxienverteilung zu bestimmen. Dabei muß ebenfalls vorausgesetzt werden, daß dieses Verhältnis unabhängig von der betrachteten Skala bestimmbar ist. In diesem Fall erhält man einen Zusammenhang zwischen dem Bias-Parameter b_g und dem Bruchteil der Materie in den Voids $b_g = 1/(1-F_v) = 1/F_g$. Verwendet man zusätzlich den Wert $\sigma_g = 0.89 \pm 0.05$, der durch eine Integration des von Einasto et al. (1998) aus vorliegenden Beobachtungsdaten zusammengestellten Galaxien-Powerspektrums bestimmt wurde, gilt für die Varianz der Dunklen Materie $\sigma_m = 0.89 F_g$. Numerische Simulationen stellen nun eine zweite, unabhängige Möglichkeit dar, einen Zusammenhang zwischen F_g und σ_m zu erhalten. Mit diesen beiden Beziehungen $F_g = \sigma_m/0.89$ und $F_g = f(\sigma_m)$ lassen sich dann sowohl F_g als auch σ_m fixieren. Man erhält auf diese Art und Weise $\sigma_m = 0.68 \pm 0.09$, was sehr gut mit anderen Literaturwerten übereinstimmt, die zur Bestimmung dieses Wertes u.a. die Entwicklung der Clusterhäufigkeit verwendet haben (z.B. Eke et al. 1996b und 1998, Bahcall et al. 1997). Trotzdem bleibt immer noch ungeklärt, weshalb man eine Abhängigkeit der Entleerung der Voids vom kosmologischen Modell beobachtet (vgl. Abb.49). Um diese Frage beantworten zu können, sind neue Simulationen notwendig: Es müßte ein einziges Modell mit einer Vielzahl von Durchläufen simuliert werden, die sich lediglich in den Phasen bei der Realisation des Powerspektrums

unterscheiden. Dann wäre es möglich, die kosmische Varianz zu quantifizieren, und es würde sich zeigen, ob es sich bei der Abhängigkeit um einen 'echten' Effekt handelt. Für das ΛCDM-Modell lagen zwar drei unterschiedliche Realisationen des Powerspektrums in Form von drei Startverteilungen vor, aber die Resultate reichten noch nicht aus, um eine verläßliche Bestätigung zu erhalten, daß Modellabhängigkeit lediglich als Streuung zu deuten ist.

Schlußwort

Es hat sich im Laufe der Anfertigung dieser Dissertation gezeigt, was für ein mächtiges Werkzeug numerische Simulationen zur Untersuchung kosmologischer Modelle darstellen. Die rasante Entwicklung der Computertechnik wird es in Zukunft erlauben, noch besser aufgelöste Simulationen unter Berücksichtigung von hydrodynamischen Effekten zu rechnen. Solche N-Body-Codes liegen heutzutage vor (z.B. HYDRA, Couchman 1995), die zu Beginn dieser Dissertation allerdings noch nicht zugänglich waren. Konnte man durch Rechnungen, die lediglich auf Dunklen Materie-Teilchen basieren, doch sehr viel über den Entstehungs- und Entwicklungsprozeß von Galaxienhaufen lernen, so steht es nun aus, auch bis in die innersten Bereiche dieser Objekte vorzudringen. Erst dann wird es möglich sein, den Entstehungsprozeß von Galaxien im kosmologischen Kontext zu verstehen.

Appendix A

Ergänzungen zu den kosmologischen Grundlagen

A.1 Lösungen der Friedmann-Gleichungen

Die Lösungen der Friedmann-Gleichungen (2.8) (vgl. Abschnitt 2.2, S.13) lassen sich für Modelle ohne kosmologische Konstante ($\Lambda = 0$) geschlossen angeben und lauten (z.B. Coles & Lucchin 1995):

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} && \text{für } \Omega_0 = 1 \\
\left.\begin{aligned}
a(\eta) &= \frac{a_0 \Omega_0}{2(1-\Omega_0)}(\cosh\eta - 1) && = A_o\ (\cosh\eta - 1) \\
t(\eta) &= \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}}(\sinh\eta - \eta) && = B_o\ (\sinh\eta - \eta)
\end{aligned}\right\} && \text{für } \Omega_0 < 1 \\
\left.\begin{aligned}
a(\theta) &= \frac{a_0 \Omega_0}{2(\Omega_0-1)}(1 - \cos\theta) && = A_g\ (1 - \cos\theta) \\
t(\theta) &= \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0-1)^{3/2}}(\theta - \sin\theta) && = B_g\ (\theta - \sin\theta)
\end{aligned}\right\} && \text{für } \Omega_0 > 1
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Die parametrischen Lösungen für offene bzw. geschlossene Universen werden im Anhang A.4 zur Bestimmung der Dichte virialisierter Objekte nach einem sphärisch symmetrischen Kollaps verwendet.

A.2 Entwicklung der kosmologischen Parameter

Wie man den Definitionen für den Hubble-Parameter H (vgl. Gl.(2.21), S.16) und den Dichteparameter Ω (vgl. Abschnitt 2.3) entnehmen kann, handelt es sich um zeitlich veränderliche Größen. Aus diesem Grund ist auch der Name 'Hubble-Konstante' ein wenig irreführend, da man damit nicht 'konstant in der Zeit', sondern 'konstant im Raum' meint. Aus diesem Grund sind diese Größen meist mit einem Index gekennzeichnet, der sich auf die Epoche bezieht, für den der Wert des entsprechenden Parameters angegeben ist. Meist handelt es sich dabei um die heutige Zeit und indiziert die Größen mit einer '0'.

Die Bestimmung der exakten Zeitabhängigkeit dieser Parameter ist ebenfalls durch die Friedmann-Gleichungen möglich, die sich unter Berücksichtigung der Definitionen (2.9), (2.10) und (2.12) (s. S.14) wie folgt schreiben läßt (vgl. z.B. Peacock & Dodds 1996):

$$\begin{aligned} H^2(a) &= H_0^2\left[\Omega_0\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{a^2}+\Omega_{\Lambda,0}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right] \\ \Omega(a) &= \frac{\Omega_0}{a+\Omega_0(1-a)+\Omega_{\Lambda,0}(a^3-a)} \\ \Omega_\Lambda(a) &= \frac{\Omega_{\Lambda,0}a^3}{a+\Omega_0(1-a)+\Omega_{\Lambda,0}(a^3-a)} \end{aligned} \tag{A.2}$$

In diesen Gleichungen ist dabei auf die Konvention für den Expansionsfaktor a zu achten. In der o.a. Gestalt wird davon ausgegangen, daß a zur Zeit t_0, für die auch die mit 0 indizierten Werte der Dichte- und des Hubble-Parameters angegeben sind, gleich Eins ist. Da diese Konvention aber nicht zwingend ist, muß dies bei der Verwendung der Formeln (A.2) berücksichtigt werden. Der in dieser Arbeit verwendete AP^{3}M-Code von H.M.P. Couchman (1991) setzt nämlich, abweichend von der Konvention $a_0 = 1$, den Expansionsfaktor für den *Start* der Simulation auf Eins ($a_i = 1$).

A.3 Lineare Störungsrechnung

Es sind zwei verschiedene Sichtweisen zur Erklärung der Entwicklung der Strukturen im Universum möglich; die eine entspricht dabei der Vorstellung von diskreten Massenpunkten unter der Wirkung der gegenseitigen gravitativen Wechselwirkung, wohingegen der anderen Betrachtungsweise ein Flüssigkeitsbild zu Grunde liegt. Die Teilchenbild ist dabei lediglich eine Approximation an das Flüssigkeitsbild bei der Verwendung numerische Simulationen (vgl. Kapitel 3).

Geht man davon aus, daß das Universum von einer perfekten Flüssigkeit erfüllt ist, so genügt es, die Dichte $\rho(\vec{r},t)$, sowie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ an jedem Ort und zu jeder Zeit zu kennen. Die Bewegungsgleichungen, die zur Lösung dieses Problems notwendig sind, lauten in einem druckfreien Medium ($p = 0$) wie folgt:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= 4\pi G\rho \\ \nabla\cdot(\rho\vec{v}) &= -\frac{\partial\rho}{\partial t} \\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} &= -\nabla\Phi \end{aligned} \tag{A.3}$$

Es empfiehlt sich, die Dichte ρ als Dichtekontrast δ zu beschreiben:

$$\delta := \frac{\rho - \overline{\rho}}{\overline{\rho}}, \tag{A.4}$$

wobei die Größe $\overline{\rho}$ die mittlere Dichte des Universums ist.

Die Transformation der Bewegungsgleichungen (A.3) auf mitbewegte Koordinaten (vgl. Abschnitt 3.3) unter Berücksichtigung von Gl.(A.4) und Linearisierung für $\delta \ll 1$ liefert:

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta}{\partial t} - 4\pi G\overline{\rho}\delta = 0. \tag{A.5}$$

In der Ableitung dieser Gleichung wurde ebenfalls $H = \dot{a}/a$ verwendet. Die Lösung dieser Gleichung zur Bestimmung des Wachstums von kleinen Schwankungen im primordialen Dichtefeld, charakterisiert durch $\delta(r,t)$, ist nur bei gleichzeitiger Integration der Friedmann-Gleichungen unter Annahme eines bestimmten kosmologischen Modells möglich. Eine spezielle Anwendung der linearisierten Euler-Bewegungsgleichungen (A.5) für den Dichtekontrast findet sich in Anhang A.4, wo die Überdichte eines virialisierten Objekts nach linearer Störungstheorie mit dem Ergebnis unter Verwendung des Virialsatzes verglichen wird.

Da es sich bei Gl.(A.5) um eine Differentialgleichung 2.Ordnung handelt, existieren zwei linear unabhängige Lösungen, von denen eine anwachsend und eine abfallend ist. Für die wachsende Lösung gilt (Heath 1977):

$$\delta \propto \frac{1}{H_0^2}\frac{\sqrt{X}}{a}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{X^3}}da\ . \tag{A.6}$$

Hierbei wird die Abkürzung $X = 1 + \Omega_0(1/a - 1) + \Omega_{\Lambda,0}(a^2 - 1)$ verwendet.

Das Integral (A.6) läßt sich nur für eine verschwindende kosmologische Konstante ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$) geschlossen lösen, und man erhält (Peebles 1984):

$$\begin{aligned} &\delta \propto a && \text{für } \Omega_0 = 1 \\ &\delta \propto 1 + 3 + \frac{3}{w^3}\sqrt{\frac{1+w}{w^3}}\ln\left(\sqrt{1+w} - \sqrt{w}\right) && \text{für } \Omega_0 < 1 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Die neue Variable $w = 1/\Omega - 1$ ist dabei proportional zum Expansionsfaktor a:

$$w = \frac{1}{\Omega} - 1 = \left(\frac{1}{\Omega_0} - 1\right)\frac{a}{a_0}\ . \tag{A.8}$$

Der Wert $w = 1$ markiert dabei im Hintergrundmodell den Übergang zur nahezu freien Expansion im offenen Modell.

A.4 Sphärischer Top-Hat-Kollaps

Betrachtung mittels Virialsatz

Um in einer numerischen Simulation gravitativ gebundene Objekte identifizieren zu können, benötigt man ein Kriterium, welches die Unterscheidung zwischen virialisierten und nicht-virialisierten Teilchengruppen zuläßt. Ziel der nun folgenden Berechnung ist die Bestimmung der Dichte ρ_p ('p' steht für 'perturbation[11]') solch eines virialisierten Objekts im Verhältnis zur Hintergrunddichte $\overline{\rho}$ in einem beliebigen kosmologischen Modell. Der Einfachheit halber geht man davon aus, daß es sich um eine sphärisch symmetrische Störung im sonst homogenen und isotropen Dichtefeld handelt. Das Theorem von Birkhoff besagt, daß die Störung als ein eigenständiges 'Universum' mit abgeänderten Modellparametern, eingebettet in das Hintergrundmodell, angesehen werden kann. Es ist sofort einleuchtend, daß lediglich Störungen, für die $\Omega_p > 1$ gilt, vom Hubble-Fluß abkoppeln und kollabieren können. Für den Dichtekontrast des Objekts zum Zeitpunkt der Virialisierung gilt:

$$1 + \delta_{\mathrm{vir}} = \frac{\rho_p(t_{\mathrm{vir}})}{\overline{\rho}(t_{\mathrm{vir}})} = \frac{1}{b^3}\frac{\rho_p(t_{\mathrm{ta}})}{\overline{\rho}(t_{\mathrm{vir}})} \,. \tag{A.9}$$

In dieser (und den folgenden) Gleichung beziehen sich die Indizes 'ta' und 'vir' auf den Zeitpunkt maximaler Ausdehnung der Störung (**t**urn-**a**round) bzw. die Zeit, zu der das Objekt als **vir**ialisiert ist. Das Verhältnis zwischen den Radien $R_{\mathrm{ta}} = R(t_{\mathrm{ta}})$ und $R_{\mathrm{vir}} = R(t_{\mathrm{vir}})$ der Störung wird als b bezeichnet:

$$f = \frac{R_{\mathrm{vir}}}{R_{\mathrm{ta}}} \,. \tag{A.10}$$

Im folgenden wird unter Verwendung des Virialsatzes eine Gleichung abgeleitet, mit deren Hilfe sich das Verhältnis b in beliebigen kosmologischen Modellen bestimmen läßt.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß man im Falle Newtonscher Mechanik die erste Friedmann-Gleichung mit dem Energiesatz identifizieren kann. Hierbei entspricht der Term

$$\frac{8\pi G}{3}\rho \mathrel{\widehat{=}} \frac{2GM}{R} \tag{A.11}$$

der (doppelten) potentiellen Energie einer Einheitsmasse im Gravitationsfeld. In Analogie dazu kann man dem Term, der die kosmologische Konstante enthält, ebenso eine potentielle Energie zuschreiben und erhält:

[11] engl. *to perturb* stören

$$\begin{aligned} U_G &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ U_\Lambda &= -\frac{1}{10}\Lambda c^2 M R^2 \ . \end{aligned} \tag{A.12}$$

Da man an gravitativ gebundenen Objekten interessiert ist, kann davon ausgegangen werden, daß der Virialsatz erfüllt ist:

$$T = \frac{n}{2}\, U \ . \tag{A.13}$$

Die Größe n ist hierbei der Exponent des Abstands im radialsymmetrischen Potential $U \propto R^n$. Für das Gravitationspotential U_G gilt somit $n = -1$ und für U_Λ gilt $n = 2$. Der Virialsatz (A.13) nimmt damit die Gestalt

$$T = -\frac{1}{2}U_G + U_\Lambda \tag{A.14}$$

an.

Verwendet man zusätzlich zum Virialsatz noch den Energieerhaltungssatz, so gelangt man zu:

$$U_{G,\mathrm{ta}} + U_{\Lambda,\mathrm{ta}} = \frac{1}{2}U_{G,\mathrm{vir}} + 2U_{\Lambda,\mathrm{vir}} \ . \tag{A.15}$$

Das Einsetzten von Gl.(A.12) in Gl.(A.15) liefert

$$-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_{\mathrm{ta}}} - \frac{1}{10}\Lambda c^2 M R_{\mathrm{ta}}^2 = -\frac{3}{10}\frac{GM^2}{R_{\mathrm{vir}}} - \frac{1}{5}\Lambda c^2 M R_{\mathrm{vir}}^2 \ , \tag{A.16}$$

was sich nach einigen Umformungen und der Einführung von Abkürzungen in eine kubische Bestimmungsgleichung für das Verhältnis b in Abhängigkeit von $\rho_p(t_{\mathrm{ta}})$ bringen läßt:

$$2\chi f^3 - (2+\chi)f + 1 = 0 \ . \tag{A.17}$$

Hierbei spezifiziert χ die Stärke von Λ relativ zur Dichte $\rho_p(t_{\mathrm{ta}})$:

$$\chi = \frac{\Lambda c^2 R_{\mathrm{ta}}^3}{3GM} = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G \rho_p(t_{\mathrm{ta}})} \ . \tag{A.18}$$

Im Falle einer verschwindenden kosmologischen Konstanten $\Lambda = 0$ vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung (A.17), und man erhält:

$$f = \frac{1}{2} \quad \text{für } \Lambda = 0 \ . \tag{A.19}$$

Es muß dann lediglich noch die Dichte $\rho_p(t_{\mathrm{ta}})$ der Störung zum Zeitpunkt maximaler Ausdehnung berechnet werden, was sich aber unter gewissen Annahmen zum kosmologischen Modell durchführen bzw. approximieren läßt.

$\Omega_0 = 1$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$

In diesem Fall kann man direkt die Lösungen der Friedmann-Gleichungen (vgl. Anhang A.1, Gl.(A.1)) verwenden:

$$\begin{aligned} \rho_p(t_{\rm ta}) &= \rho_{{\rm crit},i}\,\Omega_{p,i}\left(\frac{\Omega_{p,i}-1}{\Omega_{p,i}}\right)^3 \\ t_{\rm vir} &= 2t_{\rm ta} = \frac{\pi}{H_i}\frac{\Omega_{p,i}}{(\Omega_{p,i}-1)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß zum Zeitpunkt $t_{\rm ta}$ für die Störung $\theta = \pi$ (maximale Ausdehnung nach Gl.(A.1)) und für ein materiedominiertes Universum $\rho a^3 = \text{const.}$ gilt. Außerdem ist davon ausgegangen worden, daß sich der Zeitpunkt der Virialisierung $t_{\rm vir}$ genau dann einstellt, wenn nach Gl.(A.1) für die kollabierte Störung $a_p = 0$ gilt; in diesem Fall ($\theta = 2\pi$) erhält man $t_{\rm vir} = 2\pi B_g = 2t_{\rm ta}$. Die Indizes i beziehen sich auf einen (beliebig wählbaren) Startzeitpunkt.

Nach einigen Umformungen gelangt man dann zu:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_p(t_{\rm ta})}{\overline{\rho}(t_{\rm vir})} &= \frac{a_{\rm vir}^3}{\overline{\rho}_0}\rho_p(t_{\rm ta}) = \frac{a_{\rm vir}^3 8\pi G}{3H_0^2}\rho_p(t_{\rm ta}) = \frac{8\pi G t_{\rm vir}^2}{3(H_0 t_0)^2}\rho_p(t_{\rm ta}) \\ &= \frac{9}{4}\frac{8\pi G}{3}t_{\rm vir}^2\rho_p(t_{\rm ta}) = \frac{9\pi^2}{4}\frac{8\pi G}{3H_i^2}\frac{\Omega_{p,i}^2}{(\Omega_{p,i}-1)^3}\rho_{{\rm crit},i}\Omega_{p,i}\left(\frac{\Omega_{p,i}-1}{\Omega_{p,i}}\right)^3 \\ &= \frac{9\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Für den Dichtekontrast gilt somit:

$$1 + \delta_{\rm vir} = 18\pi^2 \simeq 178\,. \tag{A.20}$$

$\Omega_0 < 1$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$

Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, sind die Friedmann-Gleichungen in diesem Fall ebenfalls geschlossen lösbar und die parametrischen Lösungen in Gl.(A.1) im Anhang A.1 angegeben. Man erkennt der Gleichung für die Störung (geschlossenes Universum mit $\Omega_p > 1$) an, daß die Zeit bis zur maximalen Ausdehnung $t = \pi B_g$ beträgt. Zu diesem Zeitpunkt erhält man $a_{p,\rm ta} = 2A_g$. Verwendet man dies zusammen mit Gl.(A.9), so gelangt man zu (vgl. Lacey & Cole 1993):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_p(t_{\rm vir})}{\overline{\rho}(t_{\rm vir})} &= \frac{1}{f^3}\frac{\rho_p(t_{\rm ta})}{\overline{\rho}(t_{\rm vir})} = 2^3\frac{a_{\rm vir}^3}{a_{p,\rm ta}^3} = \frac{a_{\rm vir}^3}{A_g^3} = \frac{A_o^3}{A_g^3}(\cosh\eta_{\rm vir}-1)^3 = \frac{B_o^2}{B_g^2}(\cosh\eta_{\rm vir}-1)^3 \\ &= \left(\frac{t_{\rm vir}}{\sinh\eta_{\rm vir}-\eta_{\rm vir}}\right)^2\left(\frac{2\pi}{t_{\rm vir}}\right)^2(\cosh\eta_{\rm vir}-1)^3 = (2\pi)^2\frac{(\cosh\eta_{\rm vir}-1)^3}{(\sinh\eta_{\rm vir}-\eta_{\rm vir})^2} \end{aligned}$$

Bei diesen Umformungen wurde zusätzlich die Beziehung $A_g^3/B_g^2 = A_o^3/B_o^2 = \text{const.}$ ausgenutzt, die zur Erfüllung der Friedmann-Gleichungen notwendig ist. Die Bestimmung des Dichtekontrasts

$$1 + \delta_{\text{vir}} = 4\pi^2 \frac{(\cosh \eta_{\text{vir}} - 1)^3}{(\sinh \eta_{\text{vir}} - \eta_{\text{vir}})^2} \tag{A.21}$$

beschränkt sich nun auf die Berechnung von η_{vir}:

$$\eta_{\text{vir}} = \operatorname{arcosh}\left(\frac{2}{\Omega_{\text{vir}}} - 1\right) , \tag{A.22}$$

wobei für Ω_{vir} der Wert des Dichteparameters zum Zeitpunkt bestimmt werden muß, zu dem man das Objekt als virialisiert identifizieren will. Da $f(x) = (\cosh x - 1)^3/(\sinh x - x)^2$ eine monoton steigende Funktion $f(x) \geq 4.5$ für $x \geq 0$ ist, erhält man einen Dichtekontrast δ_{vir}, der im Vergleich zum flachen Modell $\Omega_0 = 1$ größer ist. Dies ist allerdings auch anschaulich klar, da der Expansionsfaktors $a_{\text{offen}}(t_{\text{vir}})$ des offenen Hintergrundmodells zum Zeitpunkt der Virialisierung größer ist als im flachen Universum.

$\underline{\Omega_0 < 1 \ , \ \Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_0}$

Für Modelle mit $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ kann man die Gleichungen (A.9) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_p(t_{\text{ta}})}{\overline{\rho}(t_{\text{vir}})} &= \frac{\rho_p(t_{\text{ta}})}{\rho_\Lambda}\frac{\rho_\Lambda}{\overline{\rho}(t_{\text{vir}})} = \frac{\rho_p(t_{\text{ta}})}{\rho_\Lambda}\frac{\Omega_{\Lambda,\text{vir}}}{\Omega_{\text{vir}}} \\
&= \frac{8\pi G \rho_p(t_{\text{ta}})}{\Lambda c^2}\frac{\Omega_{\Lambda,\text{vir}}}{\Omega_{\text{vir}}} = \frac{2}{\chi}\frac{\Omega_{\Lambda,\text{vir}}}{\Omega_{\text{vir}}} = \frac{2}{\chi}\frac{1-\Omega_{\text{vir}}}{\Omega_{\text{vir}}} \\
&= \frac{2w}{\chi}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde erneut die neue Abkürzung $w = 1/\Omega_{\text{vir}} - 1$ eingeführt. Für den Dichtekontrast gilt somit:

$$1 + \delta_{\text{vir}} = \frac{1}{f^3}\frac{2w}{\chi} \simeq 18\pi^2(1 + 0.4093\ w^{0.9052}) , \tag{A.23}$$

wobei zusätzlich eine Approximationsformel aus der Arbeit von Kitayama & Suto (1996) angeben wurde. Die Größe w wird dabei wieder zu dem Zeitpunkt bestimmt, an dem das Objekt als virialisiert identifiziert werden soll. Man erkennt, daß auch in diesem Fall der Wert des Dichtekontrasts größer als im Einstein-de-Sitter Universum ist.

Verwendung linearer Theorie

Zur Bestimmung des Dichtekontrasts δ_c, der die Dichte eines virialisierten Objekts nach einem sphärisch-symmetrischen Kollaps beschreiben soll, kann man ebenso die Ergebnisse der linearen Störungstheorie aus Anhang A.3 verwenden. Diese Werte sind u.a. bei

der Bestimmung der Massenfunktion nach Press & Schechter (1974, vgl. Anhang A.6) notwendig. Man integriert dazu das lineare Wachstum der Störung (vgl. Gl.(A.6)) bis zur Zeit $t_{\rm vir}$ und erhält Ausdrücke, die ebenfalls in der Arbeit von Kitayama & Suto (1996) angegeben sind. Im Falle eines SCDM-Modells gilt:

$$\delta_c = 1.686\ . \tag{A.24}$$

Für ein offenes Modell mit Ω_0=0.1 beträgt dieser Wert $\delta_c = 1.616$. Hieran kann man gut erkennen, daß δ_c nur sehr schwach vom kosmologischen Modell abhängt. Eine Graphik, in der diese Abhängigkeit illustriert wird, findet sich z.B. in Eke et al. (1996), Abb.1).

A.5 Powerspektrum — Korrelationsfunktion

Numerische Simulationen sind selbstverständlich nicht in der Lage, die exakte Gestalt des Universums zu reproduzieren. Keine Simulation kann mit noch so fein abgestimmten Anfangsbedingungen die genaue Lage von z.B. der Andromedagalaxie oder des Coma-Haufens bis ins Detail widerspiegeln. Aus diesem Grund arbeitet man Unterschiede bzw. Ähnlichkeiten mit Hilfe statistischer Auswerteverfahren heraus. Die am weitesten verbreitete Methode dazu ist das Powerspektrum bzw. die Korrelationsfunktion. Beide Funktionen bilden dabei ein Paar Fourier-Transformierter und sind somit nicht unabhängig voneinander.

Powerspektrum

Die Grundidee hinter dem Power- (oder auch Leistungs-) Spektrum besteht darin, die Fluktuationen im Dichtefeld durch ebene Wellen zu beschreiben:

$$\delta(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} \exp \imath \vec{k} \cdot \vec{r} \tag{A.25}$$

Die Gewichtung jeder einzelnen Welle ist dabei durch die Koeffizienten $\delta_{\vec{k}}$ gegeben. Die Größe

$$P(k) =< |\delta_{\vec{k}}|^2 > \tag{A.26}$$

bezeichnet man nun als Powerspektrum, wobei die Mittelung über ein hinreichend großes Gebiet des Universums oder über ein Ensemble von Realisationen zu erfolgen hat. Das kann durch eine Mittelung über die Moden $k = |\vec{k}|$ ersetzt werden. Die Varianz σ des Dichtefelds $\delta(\vec{r})$ läßt sich nun mit Hilfe der Definition (A.26) recht einfach durch eine Integration des Powerspektrums ausdrücken:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) dk\ , \tag{A.27}$$

Das Powerspektrum läßt sich üblicherweise (in einem gewissen Intervall) als Potenzgesetz schreiben:

$$P(k) = Ak^n \,, \tag{A.28}$$

so daß die Konvergenz des Integrals (A.27) gewährleistet ist, sofern für den Spektralindex n gilt:

$$\begin{array}{lll} n & > -3 & \text{für } k \to 0 \\ n & < -3 & \text{für } k \to \infty \,. \end{array} \tag{A.29}$$

Die Größe σ ist ein Maß für die Stärke bzw. Amplitude der Fluktuationen im Dichtefeld $\delta(\vec{r})$. Sie enthält allerdings keinerlei Informationen über die exakte räumliche Verteilung. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, die Varianz als Funktion einer Auflösungsgrenze R zu formulieren:

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) \hat{W}^2(kR) dk \,, \tag{A.30}$$

Bei $\hat{W}(kR)$ handelt es sich um die Fouriertransformierte der sog. Fensterfunktion, mit deren Hilfe die Auflösungsgrenze bestimmt ist. Am gebräuchlichsten ist dabei die Top-Hat-Filterung, bei der die Fensterfunktion im Ortsraum die folgende Gestalt hat:

$$W_{\mathrm{TH}}(r) = \begin{cases} 1/(\frac{4}{3}\pi R^3) & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} \,. \tag{A.31}$$

Man beschränkt sich somit auf Störungen im Dichtefeld bis zu einer Skala, die durch den Parameter R festgelegt ist. Das Dichtefeld $\delta(\vec{r})$ wird auf dieser Skala geglättet. Da man den Radius R der Sphäre, mit der man das Feld filtert, mit einer mittleren Masse $< M >$

$$< M > = \frac{4}{3}\pi < \rho > R^3 \tag{A.32}$$

in Verbindung bringen kann, spricht man öfter auch von einer Glättung auf einer bestimmten Massenskala. Genau dieses Verfahren ist bei der Bestimmung der Häufigkeit virialisierter Objekte einer vorgegebenen Masse M von entscheidender Bedeutung und wird im Abschnitt A.6 ausführlich erläutert.

Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion

Bei der Zwei-Punkt-Korrelation handelt es sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit, eine Galaxie im Volumen δV_1 zu finden, wenn gleichzeitig im Volumen δV_2 (mit dem Abstand $\vec{r}_{12}$ zu δV_1) eine Galaxie vorhanden ist. Mathematisch wird das durch die folgende Definition beschrieben:

$$\delta^2 P = n_V^2 \left[1 + \xi(r_{12})\right] \delta V_1 \delta V_2 \,. \tag{A.33}$$

Hierbei ist n_V die Anzahldichte der Galaxien, und die Funktion $\xi(r_{12})$ bezeichnet man als 2-Punkt-Korrelationsfunktion. Auf Grund der Homogenität und Isotropie hängt $\xi(r)$

nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ ab, und wenn eine zufällige Verteilung vorliegt, dann erhält man $\xi(r) \equiv 0$. Daraus folgt, daß $\xi(r)$ die Überschuß-Wahrscheinlichkeit im Vergleich zu einem reinen Zufallsverteilung beschreibt.

Es läßt sich weiterhin zeigen, daß die 2-Punkt-Korrelationsfunktion $\xi(r)$ und das Powerspektrum $P(k)$ ein Paar Fourier-Transformierter bilden:

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k)\, e^{-\imath \vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \\ P(k) &= \int \xi(r)\, e^{\imath \vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \end{aligned} \tag{A.34}$$

A.6 Massenfunktion virialisierter Objekte

Im Jahr 1974 präsentierten Press & Schechter eine Methode zur Bestimmung der Massenfunktion virialisierter Objekte, die lediglich auf einfachen Annahmen über das primordiale Dichtefeld basiert. In diesem Abschnitt soll die Idee vorgestellt werden, da sie eine wichtige Grundlage zur Analyse von Beobachtungen und numerischen Simulationen darstellt.

Die Anzahldichte virialisierter Objekt mit einer festen Masse M im Intervall $[M, M+dM]$ ist gegeben durch:

$$dn = \frac{dn}{dM} dM. \tag{A.35}$$

Diese Gleichung stellt die Definition der Massen-Verteilungsfunktion (kurz: Massenfunktion) dn/dM dar.

Die grundlegendste Annahme zur analytischen Berechnung der Massenfunktion besteht darin, daß das primordiale Dichtefeld der Materieverteilung Gauß-verteilt ist:

$$P(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}. \tag{A.36}$$

Um nun die Anzahl der Objekte einer bestimmten Masse zu erhalten, wird das Dichtefeld $\delta(r)$ geglättet:

Man legt in das Dichtefeld der Materieverteilung Kugeln mit dem Radius R und weist dem Mittelpunkt dieser Kugel einen neuen Dichtewert zu, der sich durch Mittelung über diese Sphäre ergibt. Das wird für jeden Punkt des Dichtefelds wiederholt, und man erhält auf diese Art und Weise das geglättete Dichtefeld. Das Ergebnis erzielt man mathematisch mittels der Faltung mit einer Fensterfunktion (vgl. Anhang A.5):

$$\delta(R, \vec{r}) = \int \delta(\vec{x}) W(R, |\vec{r} - \vec{x}|)\, d^3x \tag{A.37}$$

Die oben beschriebene Art und Weise der Glättung entspricht dabei dem Top-Hat-Filter (A.31).

Die lineare Theorie der Störungsrechnung hat gezeigt, das der Dichtekontrast virialisierter Objekte (im SCDM-Modell) durch $\delta_c = 1.686$ (vgl. Gl.(A.24)) gegeben ist. Somit ist der Bruchteil der Materie in gebundenen Objekten mit einer Masse $\geq M$ durch

$$P_{>\delta_c}(M) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta_M) d\delta_M \tag{A.38}$$

gegeben. Da wir aber nur an Objekten aus dem Intervall $[M, M + dM]$ interessiert sind, müssen noch alle Objekte der Masse $\geq dM + M$ abgezogen werden. Dazu muß das Dichtefeld auf einer Massenskala infinitesimal größer als M geglättet werden, und man gelangt dann zur gewünschten Anzahl:

$$dn = \frac{\overline{\rho}}{M} \left(P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM) \right) = \frac{\overline{\rho}}{M} \frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} \frac{d\sigma_M}{dM} dM \; . \tag{A.39}$$

Bildet man allerdings das Integral $\int dn/dMdM$, so erhält man lediglich 1/2. Press & Schechter umgingen dieses Problem dadurch, daß sie einfach die Verteilungsfunktion mit einem Faktor 2 multiplizierten. Spätere, ausgefeiltere Ableitungen dieser Formel (Bond et al. 1991) zeigten, daß Gl.(A.39) (mit dem Faktor 2) trotz der heuristischen Herleitung korrekt ist.

Verwendet man zusätzlich noch Gl.(A.36), so gelangt man schließlich und endlich zu einer Formel für die Massenfunktion:

$$\frac{dn}{dM} dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\overline{\rho}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \left| \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} \right| e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}} \frac{dM}{M} \; . \tag{A.40}$$

Die Varianz σ_M des Dichtefeldes auf der Massenskala M läßt sich sehr einfach mit Hilfe des Powerspektrums berechnen (vgl. Gl.(A.30)):

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) \hat{W}^2(kR) k^2 dk \; , \tag{A.41}$$

wobei $\hat{W}(kR)$ die Fouriertransformierte der (Top-Hat-)Fensterfunktion ist. Für ein vorgegebenes Powerspektrum läßt sich somit unter der Annahme eines Gaußschen Dichtefeldes die Massenfunktion virialisierter Objekte mit Hilfe von Gl.(A.40) ausrechnen. Der Einfluß von $P(k)$ auf die Massenfunktion ist dabei erheblich stärker als die Abhängigkeit von der kritischen Überdichte δ_c, so daß der (schwache) Einfluß des kosmologischen Modells auf δ_c vernachlässigt werden kann. In Kapitel 5, Abb.25 wurden die Massenfunktionen der simulierten kosmologischen Modelle u.a. mit genau dieser Vorhersage verglichen.

Appendix B

Der AP^{3}M-Code

B.1 Bewegungsgleichung

In Kapitel 3 hatten wir gesehen, wie sich die Bewegungsgleichungen in mitbewegten Koordinaten schreiben lassen (vgl. Gl.(3.15), S.28):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2H\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a^3}Gf(x).$$

Es wurde explizit die Gravitationskonstante G aus dem 'Kraftterm' $f(x)$ entfernt, da sie sich später mit einigen anderen Faktoren zu einem einfachen Ausdruck zusammenfassen läßt. Diese Gleichung muß nun auf interne Einheiten umgewandelt werden. Die ursprüngliche Version des verwendeten AP^{3}M-Codes von H.Couchman (1991) war allerdings nur in der Lage, Strukturbildung in einem Einstein-de-Sitter Universum zu simulieren; die Bewegungsgleichungen waren speziell diesem Modell angepaßt. Um jedoch auch offene bzw. Λ-Term-Modelle rechnen zu können, ist neue Integrations-Routine des Codes notwendig gewesen. Die o.g. Bewegungsgleichungen wurden auf interne Einheiten umgeschrieben und in das Programm implementiert.

B.2 Interne Einheiten

Die im Code intern verwendeten Einheiten (angezeigt durch den Index c) sind dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} t &= t_i \cdot t_c \\ x &= \frac{B}{L}(x_c - 1) \\ \dot{x} &= \frac{1}{t_i}\frac{B}{L}\frac{dx_c}{dt_c} \end{aligned}$$

Die internen Größen sind also dimensionslos. Die physikalische Kantenlänge der Simulationsbox (in h^{-1}Mpc) wird mit 'B' bezeichnet, die Anzahl der verwendeten Gitterstützstellen pro Raumrichtung für den PM-Teil mit L, und t_i ist das Alter des Universum zum Startzeitpunkt der Simulation.

B.3 Bewegungsgleichung in internen Einheiten

Schreibt man die Bewegungsgleichung nun mittels dieser Beziehungen auf internen Größen um, so erhält man (mit $f = f_c L^2/B^2$ für $f \propto 1/x^2$):

$$\frac{d^2 x_c}{dt_c^2} + 2\frac{da}{dt_c}\frac{1}{a}\frac{dx_c}{dt_c} = \left(\frac{L}{B}\right)^3 t_i^2 G \, \frac{1}{a^3} f_c.$$

Von nun an wird folgende Abkürzung verwendet:

$$G_c := \left(\frac{L}{B}\right)^3 t_i^2 G.$$

B.4 Wechsel der Integrationsvariablen

Die meisten Vielteilchen-Codes verwenden nicht die 'normale' Zeit t bzw. t_c zur Integration der Bewegungsgleichungen, sondern vielmehr den Expansionsfaktor a. Der AP^{3}M-Code von H.Couchman hingegen bedient sich der Größe p, die wie folgt definiert ist:

$$p := \frac{3}{2\alpha} a^\alpha.$$

Die Integration der Bewegungsgleichungen erfolgt dann in konstanten Schritten $\Delta p =$ const.. Diese Konvention ermöglicht durch eine geschickte Wahl des Parameters α mehr Flexibilität bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen. Für die in dieser Dissertation vorgestellten und analysierten Simulationen wurde α stets zu 2/3 gewählt. Durch diese Wahl erzielt man zu Beginn der Simulation, wenn sich noch keine bzw. wenig Strukturen ausgebildet haben, große 'Schritte' in a, wohingegen zu späteren Zeiten die Abstände Δa für aufeinander folgende Integrationsschritte immer kleiner werden.

Der Wechsel zur Variablen p vollzieht sich in zwei Schritten:

$$\begin{aligned} t_c &\longmapsto a_c \\ a_c &\longmapsto p_c. \end{aligned}$$

An dieser Stelle muß erwähnt werden, daß der intern verwendete Expansionsfaktor a_c ebenfalls von der üblichen Konvention abweicht; er ist für den Start der Simulation (zur Zeit t_i) auf Eins normiert, d.h. $a_c = a/a_i$:

$$a_c = 1 \Longleftrightarrow t_c = 1.$$

Diese Variablensubstitutionen sollen nun schrittweise durchgeführt werden.

$\underline{t_c \longmapsto a_c}$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_c}{dt_c} &= \frac{dx_c}{da_c}\frac{da_c}{dt_c} \\
\frac{d^2x_c}{dt_c^2} &= \frac{d^2x_c}{da_c^2}\left(\frac{da_c}{dt_c}\right)^2 + \frac{dx_c}{da_c}\frac{d^2a_c}{dt_c^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die (interne) Bewegungsgleichung liefert (mit $\dot{a}_c = da_c/dt_c$):

$$\frac{d^2x_c}{da_c^2} + \left(\frac{\ddot{a}_c}{\dot{a}_c{}^2} + \frac{2}{a_c}\right)\frac{dx_c}{da_c} = \frac{1}{a_c^3\dot{a}_c{}^2}G_c f_c$$

$\underline{a_c \longmapsto p_c}$

$$\begin{aligned}
p_c &= \frac{3}{2\alpha}a_c^\alpha \\
\frac{dx_c}{da_c} &= \frac{dx_c}{dp_c}\frac{3}{2}a_c^{\alpha-1} \\
\frac{d^2x_c}{da_c^2} &= \frac{3}{2}\left(\frac{d^2x_c}{dp_c^2}\frac{3}{2}a_c^{2(\alpha-1)} + \frac{dx_c}{dp_c}(\alpha-1)a_c^{\alpha-2}\right)
\end{aligned}$$

Erneutes Einsetzen dieser Beziehungen liefert dann (mit $q = -a_c\ddot{a}_c/\dot{a}_c{}^2$):

$$\frac{d^2x_c}{dp_c^2} + \frac{dx_c}{dp_c}\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\left(\frac{1+\alpha-q}{\alpha a_c^\alpha}\right) = \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\frac{1}{\alpha^2}\frac{G_c f_c}{\dot{a}_c^2 a_c^{2\alpha+1}} \tag{B.1}$$

In dieser Gleichung, die im AP^{3}M-Code implementiert wurde, müssen noch die Größen $q, \dot{a}_c$ und G_c näher erläutert werden. Die Berechnung von f_c ist dabei das zentrale Problem, und wird innerhalb einer eigenständigen (Sub-)Routine bewerkstelligt. Die Integration der Bewegungsgleichung erfolgt mittels eines zeitzentrierten 'Leap-Frog'-Schemas, welches Geschwindigkeiten $\dot{x}_c$ und Koordinaten x in (um einen halben Schritt) versetzten Zeitpunkten aktualisiert.

Abbremsparameter q

Es wurde die Definition des Abbremsparameters $q = -\ddot{a}_c a_c/\dot{a}_c{}^2$ verwendet, der sich aus der zweiten Friedmann-Gleichung bestimmen läßt:

$$q = \frac{1}{2}\Omega(a) - \Omega_\Lambda(a).$$

Die Zeitentwicklung der Parameter Ω und Ω_Λ ergibt sich aus Gl.(A.2) in Anhang A.2.

Expansionsgeschwindigkeit $\dot{a}_c$

Um die Größe $\dot{a}_c$ bestimmen zu können, ist die erste Friedmann-Gleichung notwendig. Ein einfaches Umschreiben auf intern verwendete Einheiten liefert:

$$\dot{a}_c = H_i t_i a_{c,0} \sqrt{\frac{\lambda_0 \left(\frac{a_c^2}{a_{c,0}^2} - 1 \right) + \Omega_0 \frac{a_{c,0}}{a_c} + (1 - \Omega_0)}{\lambda_0 (1 - a_{c,0}^2) + \Omega_0 (a_{c,0}^3 - a_{c,0}^2) + a_{c,0}^2}}$$

Gravitationskonstante G_c

Die oben definierte Gravitationskonstante in internen Einheiten G_c, läßt sich mit Hilfe der Definition der kritischen Dichte ρ_{crit} wie folgt umschreiben:

$$G = \frac{3H^2}{8\pi\rho}\,\Omega = \frac{3H_i^2}{8\pi}\frac{B^3}{Nm_p}\,\Omega_i \tag{B.2}$$

Es wurde ausgenutzt, daß G eine Konstante ist, und somit H und Ω zu jedem belieben, aber gleichen Zeitpunkt bestimmt werden können. Ebenso wurde die Dichte ρ durch den Wert Nm_p/B^3 ersetzt; N ist hierbei die Gesamtzahl aller Teilchen (mit einer Einzelmasse m_p) und B^3 die Größe der Simulationsbox (s.o.).
Die interne Gravitationskonstante G_c lautet mit dieser Vereinfachung nun:

$$G_c = \frac{3(H_i t_i)^2}{8\pi}\,\Omega_i\,\frac{L^3}{Nm_p}.$$

Setzt man sowohl G_c als auch $\dot{a}_c$ in die Bewegungsgleichung (B.1) ein, so erkennt man, daß sich das Produkt $H_i t_i$ herauskürzt und somit nicht bestimmt werden braucht.

B.5 Rückgewinnung physikalischer Einheiten

Die Umrechnung von internen Einheiten des Codes in physikalische relevante Werte ist für den Anwender Voraussetzung zur korrekten Analyse der Simulationen. An dieser Stelle sollen deshalb explizit die Formel dafür angegeben werden. Unter der Verwendung mitbewegter Größen x und $\dot{x}$

$$\begin{aligned} r &= ax \\ v &= a(\dot{x} + H_{a_c} x) \end{aligned}$$

lautet die Umrechnung von Code-internen Größen auf mitbewegte Koordinaten lautet nach o.g. genannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{B}{L}(x_c - 1) \\ \dot{x} &= \frac{3}{2}\;H_{a_c}\;a_c^{\alpha}\frac{B}{L}v_c\,. \end{aligned}$$

Nach dieser Umrechnung liegen die Koordinaten in h^{-1}Mpc und die Geschwindigkeiten in km s^{-1} vor. Allerdings ist bei der Anwendung dieser Formel die Kenntnis von $H_{a_c} = H(a_c/a_{c,0})$ notwendig, was sich mit Gl.(A.2) aus dem Anhang A.2 leicht bestimmen läßt.

Appendix C

Astronomische Konstanten und Einheiten

Mpc	$= \begin{cases} 3.260 \cdot 10^6 \text{ Lichtjahre} \\ 3.086 \cdot 10^{22}\text{m} \end{cases}$	Mega-Parsec (Mpc)
H_0	$= 100\ h$ km s^{-1}Mpc^{-1}	Hubble-Parameter ($h \simeq 0.5$–0.8)
ρ_{crit}	$= 4.7 \cdot 10^{-27} h^2$kg m^{-3}	kritische Dichte
T_0	$= 2.73$ K	Hintergrundstrahlung
$M_\odot$	$= 1.989 \cdot 10^{30}$ kg	Sonnenmasse
$L_\odot$	$= 3.85 \cdot 10^{33}$erg s^{-1}	Sonnenleuchtkraft

Literaturverzeichnis

[1] Aarseth S.J., MNRAS **126**, 223 (1963)

[2] Bahcall N.A., Soneira R., ApJ **270**, 20 (1983)

[3] Bahcall N.A., Cen R., ApJ Lett. **407**, 49 (1993)

[4] Bahcall N.A., Fan X., Cen R., ApJ Lett. **485**, 53 (1997)

[5] Bahcall N.A., Fan X., ApJ **504**, 1 (1998)

[6] Baier F., AN **300**, 85 (1979)

[7] Bardeen J.M., Steinhardt P.J., Turner M.S., Phys. Rev. **D28**, 679 (1983)

[8] Bardeen J.M., Bond J.R., Kaiser N., Szalay A.S., ApJ **304**, 15 (1986)

[9] Barnes J., Hut P., Nature **324**, 446 (1986)

[10] Barnes J., Efstathiou G.P.E., ApJ **319**, 575 (1987)

[11] Bartelmann C.M.,Ehlers J., Schneider P., ApJ **280**, 351 (1993)

[12] Bartelmann C.M., ApJ **107**, 1637 (1994)

[13] Bennett C.L., Banday A.J., Gorski K.M., Hinshaw G., Jackson P., Keegstra P., Kogut A., Smoot G.F., Wilkinson D.T., Wright E.L., ApJ Lett. **464**, 1 (1996)

[14] Bertschinger E., Ann. Rev. A & A **36**, 599 (1998)

[15] Bouchet F.R., Strauss M.A., Davis M., Fisher K.B., Yahil A., Huchra J.P., ApJ **417**, 36 (1993)

[16] Bond J.R., Cole S., Efstathiou G., Kaiser N., ApJ **379**, 440 (1991)

[17] Bond J.R., Myers S.T., ApJ Suppl. **103**, 41 (1996)

[18] Borgani S., Moscardini L., Plionis M., Gorski K.M., Holtzman J., Klypin A., Primack J.R., Smith C.C., Stompor R., NewA **1**, 321 (1997)

[19] Broadhurst T.J., Ellis R.S., Koo D.C., Szalay A.S., Nature **343**, 726 (1990)

[20] Bunn E.F., White M., ApJ **480**, 6 (1997)

[21] Buote D.A., Xu G., MNRAS **284**, 439 (1997)

[22] Carlberg R.G., Couchman H.M.P., ApJ **340**, 47 (1989)

[23] Cen R., Ostriker J.P., ApJ Lett. **399**, 113 (1992)

[24] Cen R., Ostriker J.P., eingereicht bei ApJ, `astro-ph/9809370`

[25] Cen R., ApJ **485**, 39 (1997)

[26] Chaboyer B., Demarque P., Kernan P.J., Krauss L.M., ApJ **494**, 96 (1998)

[27] Colberg J.M., White S.D.M., Jenkins A., Pearce F.R., eingereicht bei MNRAS, `astro-ph/9711040`

[28] Cole S., Lacey C., MNRAS **281**, 716 (1996)

[29] Coles P., Melott A.L., Shandarin S.F., MNRAS **260**, 765 (1993)

[30] Coles P., Lucchin F., *Cosmology*, New York: John Wiley (1995)

[31] Collins C.A., Burke D.J., Romer A.K., Sharples R.M., Nichol R.C., ApJ Lett. **479**, 117 (1997)

[32] Connolly A.J., Szalay A.S., Koo D., Romer A.K., Holden B., Nichol R.C., Miyaji T., ApJ Lett. **473**, 67 (1996)

[33] Copi C.J., Schramm D.N., Turner M.S., Science **267**, 192 (1995)

[34] Couchman H.M.P., ApJ Lett. **368**, 23 (1991)

[35] Couchman H.M.P., Thomas P.A., Pearce F.R., ApJ **352**, 797 (1995)

[36] Couchman H.M.P., *Cosmological Simulations Using Particle-Mesh Methods*, `http://www-astr.cpes.susx.ac.uk/~petert/ap3m/ap3m.html`

[37] Croft R.A.C., Efstathiou G., MNRAS **267**, 390 (1994)

[38] da Costa L.N., Pellegrini P.S., Sargent W.L.W., Tonry J., Davis M., Meiksin A., Latham D.W., Menzies J.W., Coulson I.A., ApJ **327**, 544 (1988)

[39] Davis M., Huchra J., Latham D.W., Tonry J., ApJ **253**, 423 (1982)

[40] Davis M., Efstathiou G., Frenk C. S., White S.D.M., ApJ **292**, 371 (1985)

[41] Davis M., Efstathiou G., Frenk C. S., White S.D.M., Nature **356**, 489 (1992)

[42] Dekel A., ApJ Lett. **261**, 13 (1982)

[43] Doroshkevich A.G., Kotok E.V., Novikov I.D., Polyudov A.N., Shandarin S.F., Sigov Y.S., MNRAS **192**, 643 (1980)

[44] Doroshkevich A.G., Müller V., Retzlaff J., Turchaninov V., eingereicht bei MNRAS (1998)

[45] Dressler A., Shectman S.A., Astron. J. **95**, 985 (1988)

[46] Dubinski J., ApJ **401**, 441 (1992)

[47] Dubinski J., da Costa N., Goldwirth D.S., Lecar M., Piran T., ApJ **340**, 29 (1993)

[48] Ebeling H., Voges W., Böhringer H., Edge A.C., Huchra J.P., Briel U.G., MNRAS **281**, 799 (1996)

[49] Efstathiou G., Davis M. Frenk C.S., White S.D.M., ApJ Suppl. **57**, 241 (1985)

[50] Efstathiou G., Bond J.R., White S.D.M., MNRAS **258**, 1 (1992)

[51] Einasto J., Joeveer M., Saar E., Nature **283**, 47 (1980)

[52] Einasto J., Klypin A.A., Saar E., Shandarin S.F., MNRAS **206**, 529 (1984)

[53] Einasto J., Saar E., Einasto M., Freudling W., Gramann M., ApJ **429**, 465 (1994)

[54] Einasto J., Einasto M., Gottlöber S., Müller V., Saar V., Starobinsky A.A., Tago E., Tucker D., Andernach H., Frisch P., Nature **385**, 139 (1997)

[55] Einasto J., Einasto M., Tago E., Starobinsky A.A., Atrio-Barandela F., Müller V., Knebe A., Cen R., erscheint bei ApJ, `astro-ph/9812249`

[56] Einasto M., Tago E., Jaaniste J., Einasto J., Andernach H., A&A Suppl. **123**, 119 (1997)

[57] Eke V.R., Cole S., Frenk C.S., Navarro J.F., MNRAS **281**, 703 (1996a)

[58] Eke V.R., Cole S., Frenk C.S., MNRAS **282**, 263 (1996b)

[59] Eke V.R., Cole S., Frenk C.S., Henry J.P., MNRAS **298**, 1145 (1998)

[60] Fisher K.B., Huchra J.P., Strauss M.A., Davis M., Yahil A., Schlegel D., ApJ Suppl. **100**, 69 (1995)

[61] Forman W., Bechthold J., Blair W., Giacconi G., van Speybroek L., Jones C., ApJ Lett. **243**, 133 (1981)

[62] Frenk C.S., White S.D.M., Davis M., Efstathiou G., ApJ **327**, 507 (1988)

[63] Frenk C.S., White S.D.M., Bode P., Bond R.J., bryan G.L., Cen R., Couchman H.M.P., Evrard A.E., Gnedin N., Jenkins A., Khokhlov A.M., Klypin A., Navarro J.F., Norman M.L., Ostriker J.P., Owen J.M., Pearce F.R., Pen U.-L., Steinmetz M., Thomas P.A., Villumsen J.V., Wadsley J.W., Warren M.S., Xu G., Yepes G.,

The Santa Barbara Cluster Comparision Project: A Test of Cosmological Hydrodynamics Codes, eingereicht bei ApJ (1999)

[64] Freudling W., Martel H., Haynes M.P., ApJ **377**, 344 (1991)

[65] Gao Y., in: *The Evolution of Galaxies and Their Environment*, eds. Hollenbach D., Thronson H., Shull J.M., NASA Conf. Pub. 3190, Ames: NASA 1993, 54

[66] Gelb J., Bertschinger E., ApJ **436**, 467 (1994)

[67] Geller M.J., Beers T.C., PASP **94**, 421 (1982)

[68] Geller M.J., Huchra J.P., Science **246**, 897 (1989)

[69] Girardi M., Escalera E., Fadda D., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., ApJ **482**, 41 (1997)

[70] Gross M.A.K., Somerville R.S., Primack J.R., Holtzman J., Klypin A., MNRAS **301**, 81 (1998)

[71] Haggerty M.J., Janin G., A&A **36**, 415 (1974)

[72] Heath D.J., MNRAS **179**, 351 (1977)

[73] Hockney R.W., Eastwood J.W., *Computer Simulations Using Particles*, Bristol: Adam Hilger (1988)

[74] Jain B., Bertschinger E., ApJ **431**, 495 (1994)

[75] Jenkins A., Frenk C.S., Pearce F.R., Thomas P.A., Colberg J.M., White S.D.M., Couchman H.M.P., Peacock J.A., Efstathiou G., Nelson A.H., ApJ **499**, 20 (1998)

[76] Jing Y.P., Mo H.J., Börner G., Fang L.Z., MNRAS **276**, 417 (1995)

[77] Kaiser N., ApJ Lett. **284**, 9 (1984)

[78] Katgert P., Mazure A., Perea J., Den Hartog R., Moles M., Le Fevre O., Dubath P., Focardi P., Rhee G., Jones B., Excalera E., Biviano A., Gerbal D., Giuricin G., A&A **310**, 8 (1996)

[79] Kitayama T., Suto Y., ApJ **469**, 480 (1996)

[80] Kauffmann G., White S.D.M., MNRAS **261**, 921 (1993)

[81] Klypin A., Kopylov A.A., Soviet. Astr. Letters **9**, 41 (1983)

[82] Klypin A., Borgani S., Holtzman J., Primack J., ApJ **444**, 1 (1995)

[83] Klypin A., Gottlöber S., Kravtsov A.V., Khokhlov A.M., erscheint bei ApJ, `astro-ph/9708191`

[84] Krauss L.M., ApJ **501**, 461 (1998)

[85] Kravtsov A.V., Klypin A.A., Khokhlov A.M., ApJ Suppl. **111**, 73 (1997)

[86] Kravtsov A.V., Klypin A.A., Bullock J.S., Primack J.R., ApJ **502**, 48 (1998)

[87] Kravtsov A.V., Klypin A.A., eingereicht bei ApJ, `astro-ph/9812311` (1998)

[88] Lacey C., Cole S., MNRAS **262**, 627 (1993)

[89] Lacey C., Cole S., MNRAS **271**, 676 (1994)

[90] Lin H., Kirshner R.P., Shectman S.A., Landy S.D., Oemler A., Tucker D.L., Schechter P.L., ApJ **471**, 617 (1996)

[91] Lindner U., Einasto J., Einasto M., Freudling W., Fricke K., Tago E., A&A **301**, 329 (1995)

[92] Loveday J., Efstathiou G., Peterson B.A., Moddox S.J., ApJ **400**, 43 (1992)

[93] Ma C.P., Bertschinger E., ApJ Lett. **434**, 5 (1994)

[94] Maddox S., in: *Large Scale Structures: Tracks and Traces*, Proceedings des 12.Potsdam Cosmology Workshop, ed. V. Müller et al. , World Scientific 1998, S. 91

[95] Melott A.L., Shandarin S.F., Splinter R.J., Suto Y., ApJ Lett. **479**, 79 (1997)

[96] Merritt D., ApJ **289**, 18 (1985)

[97] Mohr J.J., Fabricant D.G., Geller M.J., ApJ **413**, 492 (1993)

[98] Mohr J.J., Evrard A.E., Fabricant D.G., Geller M.J., ApJ **447**, 8 (1995)

[99] Monaco P., ApJ **447**, 23 (1995)

[100] Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., ApJ **490**, 493 (1997)

[101] Oort J.H., Ann. Rev. A & A **21**, 373 (1983)

[102] Ostriker J.P., Ann. Rev. A & A **31**, 689 (1993)

[103] Peacock F.R., Dodds S.J., MNRAS **267**, 1020 (1994)

[104] Peacock F.R., Dodds S.J., MNRAS **280**, L19 (1996)

[105] Pearce F.R., Couchman H.M.P., NewA **2**, 411 (1997)

[106] Peebles P.J.E., Astron. J. **75**, 13 (1970)

[107] Peebles P.J.E., Groth E.J., A&A **53**, 131 (1976)

[108] Peebles P.J.E., *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press (1984)

[109] Pen U., Seljak U., Turok N., Phys. Rev. Lett. **79**, 1611 (1997)

[110] Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G., Knop R.A., Nugent P., Castro P.G., Deustua S., Fabbro S., Goodbar A., Groom D.E., Hook I.M., Kim A.G., Lee J.C., Nunes N.J., Pain R., Pennypacker C.R., Quimby R., erscheint bei ApJ, `astro-ph/9812133`

[111] Pettini M., Kellogg M., Steidel C.C., Dickinson M., Adelberger K.L., Giavalisco M., ApJ **508**, 539 (1998)

[112] Pinkney J., Roettiger K., Burns J.O., Bird C.M., ApJ **104**, 1 (1996)

[113] Press W.H., Schechter P.L., ApJ **187**, 425 (1974)

[114] Primack J.R., Gross M.A.K., `astro-ph/9810204`

[115] Richstone D., Loeb A., Turner E.L., ApJ **393**, 477 (1992)

[116] Rosati P., Della Ceca R., Norman C., Giacconi R., ApJ Lett. **429**, 21 (1998)

[117] Sanders D.B., Mirabel I.F., Ann. Rev. A & A **34**, 749 (1996)

[118] Saunders W., Frenk C.S., Rowan-Robinson M., Lawrence A., Efstathiou G., Nature **349**, 32 (1991)

[119] Saunders W. et al. , in: *Wide Field Spectroscopy and the Distant Universe*, Proceedings der 35.Herstmonceux Konferenz (1995)

[120] Seljak U., Zaldarriaga M., ApJ **469**, 437 (1996)

[121] Serna A., Gerbal D., A&A **309**, 65 (1996)

[122] Shectman S.A., Landy S.D., Oemler A., Tucker D.L., Lin H., Kirshner R.P., Schechter P.L., ApJ **470**, 172 (1996)

[123] Smoot G.F., Bennett C.L., Kogut A., Wright E.L., Aymon J., Boggess N.W., Cheng E.S., de Amici G., Gulkis S., Hauser M.G., Hinshaw G., Jackson P.D., Janssen M., Kaita E., Kelsall T., Keegstra P., Lineweaver C., Loewenstein K., Lubin P., Mather J., Meyer S.S., Moseley S.H., Murdock T., Rokke L., Silverberg R.F., Tenorio L., Weiss R., Wilkinson D.T., ApJ Lett. **396**, 1 (1992)

[124] Solanes J.M., Salvador-Salvador-Solé E. González-Casado G., erscheint bei A&A, `astro-ph/9812103`

[125] Spitzer L., ApJ Lett. **158**, 139 (1969)

[126] Splinter R.J., Melott A.L., Shandarin S.F., and Suto Y., ApJ **497**, 38 (1998)

[127] Steidel C.C., Adelberger K.L., Dickinson M., Giavalisco M., Pettini M., Kellogg M., ApJ **492**, 428 (1998)

[128] Suisalu L., Saar E., MNRAS **274**, 287 (1995a)

[129] Suisalu L., Saar E., eingereicht bei MNRAS, `astro-ph/9511120` (1995b)

[130] Szalay A.S.,in: *Large Scale Structures: Tracks and Traces*, Proceedings des 12.Potsdam Cosmology Workshop, ed. V. Müller et al. , World Scientific 1998, S. 97

[131] Thomas P.A., Colberg J.M., Couchman H.M.P., Efstathiou G.P., Frenk C.S., Jenkins A.R., Nelson A.H., Hutchings R.M., Peacock J.A., Pearce F.R., White S.D.M., MNRAS **296**, 1061 (1998)

[132] Tissera P.B., Dominguez-Tenreiro R., MNRAS **297**, 177 (1998)

[133] Totsuji H., Kihara T., Astron. Soc. of Japan, **21**, 221 (1969)

[134] Valdarnini R., Ghizzardi S., Bonometto S., erscheint bei NewA, `astro-ph/9901151`

[135] van Kampen E., MNRAS **273**, 295 (1995)

[136] Vettolani G., Zucca E., Merighi R., Mignoli M., Proust D., Zamorani G., Cappi A., Guzzo L., Maccagni D., Ramella M., Strippe G.M., Blanchard A., Cayatte V., Collins C., Macgillivray H., Maurogordato S., Scaramella R., Balkowski C., Chincarini G., Felenbok P., A&A Suppl. **130**, 323 (1998)

[137] Viana P.T.P., Liddle A.R., MNRAS **281**, 323 (1996)

[138] Walker T.P., Steigmann G., Schramm D.N., Olive K.A., Kang H., ApJ **376**, 51 (1991)

[139] Warren M.A., Quinn P.J., Salmon J.K., Zurek W.H., ApJ **399**, 405 (1992)

[140] West M.J., Oemler A., Dekel A., ApJ **327**, 1 (1988)

[141] West M.J., MNRAS **268**, 797 (1994)

[142] White S.D.M., MNRAS **177**, 717 (1976)

[143] White S.D.M., Efstathiou G., Frenk C.S., MNRAS **262**, 1023 (1993)

[144] White S.D.M., in *Cosmology and Large-Scale Structure, Les Houches Session LX*, eds. Schaeffer R., Silk J., Spiro M., Zinn-Justin J., Elsevier 1996, S. 349 (1996)

[145] Zabludoff A.I., Mulchaey J.S., ApJ Lett. **498**, 5 (1998)

[146] Zel'dovich Y.B., A&A **5**, 84 (1970)

Danksagung

Für die Vergabe des Themas und die intensive Betreuung möchte ich mich ganz herzlich bei Dr. Volker Müller bedanken. Er stand mir jederzeit mit Ratschlägen und Anregungen zur Seite.

Gleichzeitig möchte ich meinen Eltern für die ideelle sowie finanzielle Unterstützung danken, ohne die mir die Anfertigung dieser Dissertation nicht möglich gewesen wäre. Dabei gilt mein Dank besonders meiner Mutter, die zu Lebzeiten immer versucht hat, mich in dem zu unterstützen, was mir wichtig ist.

Für die fachliche Unterstützung möchte ich Dr. Stefan Gottlöber sowie Jörg M. Colberg danken und Prof. Jaan Einasto, Prof. Anatoly Klypin und Andrey Kravtsov für die fruchtbare Zusammenarbeit .

Zusätzlich sollen meine Kommilitonen Tilo Jankowski, Andreas Drecker, Robert Rohde und Rüdiger Riediger nicht unerwähnt bleiben, da sie mir die Zeit am AIP durch viele anregende Gespräche (Studentensemiar ◡̈) verschönert haben.

Insbesondere gilt mein Dank jedoch meiner Freundin (und ihren Eltern), ohne deren Beistand und Hilfe während aller schwieriger Phasen mir die Weiterarbeit nicht möglich gewesen wäre.