

Ecuaciones Lineales. Método LU.

$Ax = b$ se factoriza A de la forma $A = LU$, donde L y U son dos matrices triangulares.

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases}$$

Para mayor claridad describimos el método con un ejemplo genérico de un sistema con 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

Obención de L y U .

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix}$$

Fila L * Columna U

$$\begin{array}{llll} 1 & * & 1 & \Rightarrow U_{11} = A_{11} \\ 1 & * & 2 & \Rightarrow U_{12} = A_{12} \\ 1 & * & 3 & \Rightarrow U_{13} = A_{13} \\ 1 & * & 4 & \Rightarrow U_{14} = A_{14} \\ & & & \Rightarrow U_{1j} = A_{1j} \\ 2 & * & 1 & \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{U_{11}} A_{21} \\ 2 & * & 2 & \Rightarrow U_{22} = A_{22} - L_{21} U_{12} \\ 2 & * & 3 & \Rightarrow U_{23} = A_{23} - L_{21} U_{13} \\ 2 & * & 4 & \Rightarrow U_{24} = A_{24} - L_{21} U_{14} \\ & & & \Rightarrow U_{2j} = A_{2j} - L_{21} U_{1j} \\ 3 & * & 1 & \Rightarrow L_{31} = \frac{1}{U_{11}} A_{31} \\ 3 & * & 2 & \Rightarrow L_{32} = \frac{1}{U_{22}} (A_{32} - L_{31} U_{12}) \\ 3 & * & 3 & \Rightarrow U_{33} = A_{33} - (L_{31} U_{13} + L_{32} U_{23}) \\ 3 & * & 4 & \Rightarrow U_{34} = A_{34} - (L_{31} U_{14} + L_{32} U_{24}) \\ & & & \Rightarrow U_{3j} = A_{3j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{3k} U_{kj} \\ 4 & * & 1 & \Rightarrow L_{41} = \frac{1}{U_{11}} A_{41} \\ 4 & * & 2 & \Rightarrow L_{42} = \frac{1}{U_{22}} (A_{42} - L_{41} U_{12}) \\ 4 & * & 3 & \Rightarrow L_{43} = \frac{1}{U_{33}} (A_{43} - L_{41} U_{13} - L_{42} U_{23}) \\ 4 & * & 4 & \Rightarrow U_{44} = A_{44} - (L_{41} U_{14} + L_{42} U_{24} + L_{43} U_{34}) \end{array}$$

De aquí inducimos para el caso general:

$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} \quad i \leq j \quad ; \quad U_{ij} = 0 \quad i > j$$

$$L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}} (A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}) \quad i > j \quad ; \quad L_{ij} = 0 \quad i < j \quad ; \quad L_{ii} = 1$$

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases}$$

$$Lz = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = b_1$$

$$L_{21}z_1 + z_2 = b_2 \Rightarrow z_2 = b_2 - L_{21}z_1$$

$$L_{31}z_1 + L_{32}z_2 + z_3 = b_3 \Rightarrow z_3 = b_3 - (L_{31}z_1 + L_{32}z_2)$$

$$L_{41}z_1 + L_{42}z_2 + L_{43}z_3 + z_4 = b_4 \Rightarrow z_4 = b_4 - (L_{41}z_1 + L_{42}z_2 + L_{43}z_3)$$

De aquí inducimos para el caso general de n ecuaciones con n incógnitas:

$$z_1 = b_1 \quad ; \quad z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}z_j$$

$$Ux = z \Rightarrow \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$U_{44}x_4 = z_4 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{U_{44}}z_4$$

$$U_{33}x_3 + U_{34}x_4 = z_3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{U_{33}}(z_3 - U_{34}x_4)$$

$$U_{22}x_2 + U_{23}x_3 + U_{24}x_4 = z_2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{U_{22}}(z_2 - U_{23}x_3 - U_{24}x_4)$$

$$U_{11}x_1 + U_{12}x_2 + U_{13}x_3 + U_{14}x_4 = z_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{U_{11}}(z_1 - U_{12}x_2 - U_{13}x_3 - U_{14}x_4)$$

De aquí inducimos para el caso general de n ecuaciones con n incógnitas:

$$x_n = \frac{1}{U_{nn}}z_n \quad ; \quad x_i = \frac{1}{U_{ii}}(z_i - \sum_{j=i+1}^n U_{ij}x_j)$$

Ejemplo.

$$Ax = b \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Factorización $A = LU$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

Igualando términos obtenemos:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/9 & 1 & 0 \\ 1/3 & 99/264 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 88/9 & 25/9 \\ 0 & 0 & 9.625 \end{pmatrix}$$

2. Resolución de $Lz = b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/9 & 1 & 0 \\ 1/3 & 99/264 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \implies z = \begin{pmatrix} 10 \\ 151/9 \\ -9.625 \end{pmatrix}$$

3. Resolución de $Ux = z$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 88/9 & 25/9 \\ 0 & 0 & 9.625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 151/9 \\ -9.625 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio.

$$Ax = b \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resumen de fórmulas.

$Ax = b$ se factoriza A de la forma $A = LU$, donde L y U son dos matrices triangulares.

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases}$$

Los índices $i, j, k = 0, \dots, n-1$ cuando se programe en C++.

Si $i < j$

$$L_{ij} = 0 \quad ; \quad U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} L_{ik}U_{kj}$$

Si $i = j$

$$L_{ii} = 1 \quad ; \quad U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} L_{ik}U_{kj}$$

Si $i > j$

$$U_{ij} = 0 \quad ; \quad L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}}(A_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} L_{ik}U_{kj}) \quad ;$$

$$z_0 = b_0 \quad ; \quad z_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} L_{ij}z_j \quad ; \quad x_{n-1} = \frac{1}{U_{n-1n-1}}z_{n-1} \quad ; \quad x_i = \frac{1}{U_{ii}}(z_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} U_{ij}x_j)$$

Resumen de fórmulas.

$Ax = b$ se factoriza A de la forma $A = LU$, donde L y U son dos matrices triangulares.

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases}$$

Los índices $i, j, k = 0, \dots, n-1$ cuando se programe en C++.

Si $i < j$

$$L_{ij} = 0 \quad ; \quad U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} L_{ik}U_{kj}$$

Si $i = j$

$$L_{ii} = 1 \quad ; \quad U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} L_{ik}U_{kj}$$

Si $i > j$

$$U_{ij} = 0 \quad ; \quad L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}}(A_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} L_{ik}U_{kj}) \quad ;$$

$$z_0 = b_0 \quad ; \quad z_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} L_{ij}z_j \quad ; \quad x_{n-1} = \frac{1}{U_{n-1n-1}}z_{n-1} \quad ; \quad x_i = \frac{1}{U_{ii}}(z_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} U_{ij}x_j)$$

Método de Jacobi

Ejemplo del método de Jacobi para resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}9x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \implies x_1 = \frac{1}{9}(10 - x_2 - x_3) \\2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= 19 \implies x_2 = \frac{1}{10}(19 - 2x_1 - 3x_3) \\3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= 0 \implies x_3 = \frac{1}{11}(0 - 3x_1 - 4x_2)\end{aligned}$$

Fórmula para la iteración:

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= \frac{1}{9}(10 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) \\x_2^{(k)} &= \frac{1}{10}(19 - 2x_1^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}) \\x_3^{(k)} &= \frac{1}{11}(0 - 3x_1^{(k-1)} - 4x_2^{(k-1)})\end{aligned}$$

Valor inicial: $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$

k	float			double		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.111	1.900	.000	1.111	1.900	.000
2	.900	1.678	-.994	.900	1.678	-.994
3	1.035	2.018	-.856	1.035	2.018	-.856
4	.982	1.950	-1.016	.982	1.950	-1.016
5	1.007	2.008	-.977	1.007	2.008	-.977
6	.996	1.992	-1.005	.996	1.992	-1.005
7	1.002	2.002	-.996	1.002	2.002	-.996
8	.999	1.998	-1.001	.999	1.998	-1.001
9	1.000	2.001	-.999	1.000	2.001	-.999
10	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
11	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
12	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
13	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
14	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
15	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000

Solución exacta:

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \quad \text{donde: } A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 847 \quad A^{-1} = \frac{1}{847} \begin{pmatrix} 98 & -7 & -7 \\ -13 & 96 & -25 \\ -22 & -33 & 88 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}9x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \implies 9x_1 = (10 - x_2 - x_3) \\2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= 19 \implies 10x_2 = (19 - 2x_1 - 3x_3) \\3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= 0 \implies 11x_3 = (0 - 3x_1 - 4x_2)\end{aligned}$$

Si la ecuación es $Ax = b$, lo anterior sería como escribir:

$$\begin{aligned}A_{11}x_1 &= (b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3) \\A_{22}x_2 &= (b_2 - A_{21}x_1 - A_{23}x_3) \\A_{33}x_3 &= (b_3 - A_{31}x_1 - A_{32}x_2)\end{aligned}$$

$$Ax = b \Rightarrow Cx = b + (C - A)x \quad \text{donde } C_{ii} = A_{ii} ; C_{ij} = 0, i \neq j$$

Fórmula de iteración:

$$Cx^{(k)} = b + (C - A)x^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} Cx = b + (C - A)x \\ Cx^{(k)} = b + (C - A)x^{(k-1)} \end{array} \right\} &\Rightarrow C(x - x^{(k)}) = (C - A)(x - x^{(k-1)}) \\&\Rightarrow (x - x^{(k)}) = C^{-1}(C - A)(x - x^{(k-1)}) \\&\Rightarrow (x - x^{(k)}) = (1 - C^{-1}A)(x - x^{(k-1)}) \\&\Rightarrow (x - x^{(k)}) = (1 - C^{-1}A)^k(x - x^0) \\&\Rightarrow \|(x - x^{(k)})\| = \|(1 - C^{-1}A)^k(x - x^0)\| \\&\Rightarrow \|(x - x^{(k)})\| \leq \|(1 - C^{-1}A)^k\| \|(x - x^0)\| \\&\Rightarrow \|(x - x^{(k)})\| \leq \|(1 - C^{-1}A)\|^k \|(x - x^0)\|\end{aligned}$$

Si $\|1 - C^{-1}A\| < 1$ entonces $\|(x - x^{(k)})\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$

Qué tipo de matrices cumplen la condición de convergencia ?

$$1 - C^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & A_{12}/A_{11} & A_{13}/A_{11} \\ A_{21}/A_{22} & 1 & A_{23}/A_{22} \\ A_{31}/A_{33} & A_{32}/A_{33} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}/A_{11} & A_{13}/A_{11} \\ A_{21}/A_{22} & 0 & A_{23}/A_{22} \\ A_{31}/A_{33} & A_{32}/A_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|1 - C^{-1}A\|_{sup} = \sup((|A_{12}| + |A_{13}|)/|A_{11}|, (|A_{21}| + |A_{23}|)/|A_{22}|, (|A_{31}| + |A_{32}|)/|A_{33}|)$$

A diagonal dominante.

Otra norma válida: norma cuadrática o norma de Frobenius.

$$\|1 - C^{-1}A\|_2 = \sqrt{(A_{12}^2 + A_{13}^2)/A_{11}^2 + (A_{21}^2 + A_{23}^2)/A_{22}^2 + (A_{31}^2 + A_{32}^2)/A_{33}^2}$$

Algoritmo de Jacobi.

if (convergencia asegurada)

$$x^{(a)} = x_{inicial}$$

Obtener x

$$Cx = b + (C - A)x^{(a)}$$

$$while(||x - x^{(a)}|| > \epsilon)$$

$$x^{(a)} = x$$

Obtener x

$$Cx = b + (C - A)x^{(a)}$$

Propiedad. En $(R^n, \| \cdot \|_{sup})$, $\|A\| = \sup_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$, donde A_{ij} es la matriz asociada al operador en la base canónica.

Dem.

1)

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \\ \vec{h} &= A\vec{x} \quad , \quad \|\vec{h}\| = \sup_{i=1,n} |h_i| \\ h_i &= \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \Rightarrow |h_i| = |\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |A_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^n |A_{ij}| \end{aligned}$$

2)

$$\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \geq \|A\vec{w}\|$$

para cierto vector $\vec{w} / \|\vec{w}\| = 1$

$$\|A\vec{w}\| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n A_{ij}w_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n A_{kj}w_j \right|$$

Elijamos $\vec{w} / w_j = 1$ si $A_{kj} \geq 0$ y $w_j = -1$ si $A_{kj} < 0$
Entonces:

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{kj}w_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{kj}|$$

Elijamos $k / \sum_{j=1}^n |A_{kj}| = \max_i \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$

Método de Gauss-Seidel

Es una optimización del método de Jacobi. Se trabaja con cada componente de x que se van usando según se van determinando. En el ejemplo de sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, x en la iteración k -ésima sería:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1^{(k)} &= (b_1 - A_{12}x_2^{(k-1)} - A_{13}x_3^{(k-1)}) \\ A_{22}x_2^{(k)} &= (b_2 - A_{21}x_1^{(k)} - A_{23}x_3^{(k-1)}) \\ A_{33}x_3^{(k)} &= (b_3 - A_{31}x_1^{(k)} - A_{32}x_2^{(k)}) \end{aligned}$$

Para que se vea mejor el algoritmo, vamos a considerar un ejemplo genérico de 5 ecuaciones con 5 incógnitas. Lo escribimos comenzando los índices en cero para mayor similitud con el posterior código C++.

$$\begin{aligned}
A_{00}x_0^{(k)} &= b_0 - A_{01}x_1^{(k-1)} - A_{02}x_2^{(k-1)} - A_{03}x_3^{(k-1)} - A_{04}x_4^{(k-1)} \\
A_{11}x_1^{(k)} &= b_1 - A_{10}x_0^{(k)} - A_{12}x_2^{(k-1)} - A_{13}x_3^{(k-1)} - A_{14}x_4^{(k-1)} \\
A_{22}x_2^{(k)} &= b_2 - A_{20}x_0^{(k)} - A_{21}x_1^{(k)} - A_{23}x_3^{(k-1)} - A_{24}x_4^{(k-1)} \\
A_{33}x_3^{(k)} &= b_3 - A_{30}x_0^{(k)} - A_{31}x_1^{(k)} - A_{32}x_2^{(k)} - A_{34}x_4^{(k-1)} \\
A_{44}x_4^{(k)} &= b_4 - A_{40}x_0^{(k)} - A_{41}x_1^{(k)} - A_{42}x_2^{(k)} - A_{43}x_3^{(k)}
\end{aligned}$$

El algoritmo generico de GS seria:

if (convergencia asegurada)

$$\begin{aligned}
&x^{(a)} = x_{inicial} \\
&\textit{Obtener } x \\
&\textit{for}(i = 0; i < n; i++) \\
&x_i = \frac{1}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n-1} A_{ij}x_j^{(a)}) \\
&\textit{while}(\|x - x^{(a)}\| > \epsilon) \\
&\quad x^{(a)} = x \\
&\textit{Obtener } x \\
&\textit{for}(i = 0; i < n; i++) \\
&x_i = \frac{1}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n-1} A_{ij}x_j^{(a)})
\end{aligned}$$