

BÚSQUEDA DE CEROS. Método de la bisección.

Queremos encontrar el valor de x que verifica $f(x) = 0$.

Supongamos que sabemos que $x \in (a, b)$. Entonces, $f(a) * f(b) < 0$. Se trata de realizar divisiones sucesivas del intervalo hasta acotar la solución en un subintervalo de tamaño menor que la precisión deseada en el cálculo.

Dividimos el intervalo (a, b) en dos trozos iguales (a, x_0) y (x_0, b) donde $x_0 = (a + b)/2$. Supongamos que se cumple $f(x_0) * f(b) < 0$, entonces llamamos $a = x_0$ y dividimos el nuevo intervalo (a, b) en dos trozos iguales (a, x_0) y (x_0, b) donde $x_0 = (a + b)/2$. Supongamos que se cumple $f(a) * f(x_0) < 0$, entonces llamamos $b = x_0$ y dividimos el nuevo intervalo (a, b) en dos trozos iguales (a, x_0) y (x_0, b) donde $x_0 = (a + b)/2$.

Este proceso iterativo se continuará mientras $|b - a| > \epsilon$ donde ϵ es la precisión que necesitamos para la solución. Al final del proceso iterativo, la solución numérica será $x_0 = (a + b)/2 \pm \epsilon$.

Error del método.

Sea x_c la solución exacta de $f(x) = 0$ y $x_0^{(n)}$ la solución que se obtiene usando el método de la bisección con n iteraciones. El error en la aproximación numérica será $|x_c - x_0^{(n)}| \leq \epsilon$.

Convergencia.

Después de n iteraciones, el intervalo n -ésimo tiene la mitad de longitud que el intervalo $n - 1$, es decir:

$$(b^{(n)} - a^{(n)}) = \frac{1}{2}(b^{(n-1)} - a^{(n-1)}) = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Entonces:

$$|x_c - x_0^{(n)}| \leq |b^{(n)} - a^{(n)}| = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Luego, el método converge a la solución exacta cuando $n \rightarrow \infty$ a la velocidad indicada.

Relación entre el número de iteraciones y ϵ .

Después de n iteraciones,

$$|b^{(n)} - a^{(n)}| \leq \epsilon$$

Entonces:

$$\frac{1}{2^n}(b - a) \leq \epsilon \implies n \geq \frac{\ln((b - a)/\epsilon)}{\ln 2}$$

BÚSQUEDA DE CEROS. Método de Newton - Raphson

Queremos encontrar el valor de x que verifica $f(x) = 0$.

El método consiste en seguir la pendiente de la función f hasta llegar al cero.

Sea $x^{(0)}$ un valor inicial. La derivada de f en $x^{(0)}$ es la tangente a f en el punto $x^{(0)}$. Sea $(x^{(1)}, 0)$ un punto por donde pasa esta tangente. Entonces,

$$f'(x^{(0)}) = \frac{f(x^{(0)})}{x^{(0)} - x^{(1)}}$$

Despejando $x^{(1)}$ tenemos:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

Podemos comenzar de nuevo el proceso considerando x_1 como valor inicial. Entonces:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

Así sucesivamente, tenemos un proceso iterativo donde:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

El proceso iterativo se sigue mientras $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| > \epsilon$ donde ϵ es la precisión requerida; es nuestro error en la determinación del cero.

Convergencia

Usando el teorema de Taylor

$$f(x_c) = f(x^{(n)}) + (x_c - x^{(n)})f'(x^{(n)}) + \frac{1}{2}(x_c - x^{(n)})^2 f''(\xi^{(n)})$$

donde $\xi^{(n)} \in (x_c, x^{(n)})$.

Como $f(x_c) = 0$ y dividiendo por $f'(x^{(n)})$ nos queda:

$$0 = \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} + (x_c - x^{(n)}) + (x_c - x^{(n)})^2 \frac{f''(\xi^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}$$

Como

$$x^{(n)} - x^{(n+1)} = \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

tenemos:

$$x_c - x^{(n+1)} = -\frac{f''(\xi^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}(x_c - x^{(n)})^2$$

Si

$$\frac{f''(\xi^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}$$

acotado, llamemos M a la cota, es decir:

$$M = \frac{\max |f''(x)|}{2 \min |f'(x)|}$$

donde x está en la region de trabajo, entonces

$$|x_c - x^{(n+1)}| \leq M|x_c - x^{(n)}|^2 = M^{-1}(M|x_c - x^{(n)}|)^2 \leq M^{-1}(M|x_c - x^{(0)}|)^{2^{n+1}}$$

Si $M|x_c - x^{(0)}| < 1$, entonces $|x_c - x^{(n+1)}| \rightarrow 0$

BÚSQUEDA DE CEROS. Método de la Secante.

La estrategia es parecida a la del método de Newton-Raphson, pero en lugar de utilizar un punto inicial se utilizan dos puntos para caer por la recta que los une hasta el eje de abscisas.

Igualando las pendientes:

$$\frac{f(x^{(1)})}{x^{(1)} - x^{(2)}} = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}}$$

Despejando $x^{(2)}$ obtenemos:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{\Delta^{(1)}}$$

donde

$$\Delta^{(1)} = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}}$$

En general,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{\Delta^{(n)}}$$

donde

$$\Delta^{(n)} = \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}}$$

El proceso iterativo se sigue mientras $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| > \epsilon$ donde ϵ es la precisión requerida; es nuestro error en la determinación del cero.

Convergencia

Sea $e_n = x^{(n)} - x_c$. Llamemos $f_n = f(x^{(n)})$. Entonces,

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x^{(n+1)} - x_c = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f_n - f_{n-1}} f_n - x_c = \\ &= \frac{x^{(n)} f_n - x^{(n)} f_{n-1} - x^{(n-1)} f_n + x^{(n-1)} f_n - f_n x_c + f_{n-1} x_c}{f_n - f_{n-1}} = \\ &= \frac{e_{n-1} f_n - e_n f_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} = \frac{f_n - f_{n-1}}{f(x_c + e_n) - f(x_c + e_{n-1})} \end{aligned}$$

Aproximando la función por su desarrollo de Taylor hasta orden 2, es decir:

$$f(x_c + e_n) \sim f'(x_c) e_n + \frac{f''(x_c)}{2} e_n^2 + O(e_n^3)$$

tenemos:

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1} e_n \frac{f''(x_c)}{2} + O(e_{n-1}^4)}{f'(x_c) + (e_n + e_{n-1}) \frac{f''(x_c)}{2} + O(e_{n-1}^2)}$$

Como:

$$\frac{1}{f'(x_c) + \epsilon} \sim \frac{1}{f'(x_c)} - \epsilon \frac{1}{(f'(x_c))^2}$$

tenemos:

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1}e_n f''(x_c)}{2f'(x_c)} + O(e_{n-1}^3)$$

Queremos encontrar α tal que $|e_{n+1}| = C|e_n|^\alpha$ es decir:

$$\left| \frac{e_{n-1}e_n f''(x_c)}{2f'(x_c)} \right| = C|e_n|^\alpha \Rightarrow \left| \frac{e_{n-1}f''(x_c)}{2f'(x_c)} \right| = C|e_n|^{\alpha-1} \Rightarrow |e_n|^{\alpha-1} = D|e_{n-1}|$$

donde

$$D = \left| \frac{e_{n-1}f''(x_c)}{2Cf'(x_c)} \right|$$

La relacion de recurrencia anterior la podemos escribir como:

$$|e_{n+1}|^{\alpha-1} = D|e_n|$$

Elevando los dos lados a α queda:

$$|e_{n+1}|^{\alpha(\alpha-1)} = D^\alpha |e_n|^\alpha$$

Por otro lado sabemos que

$$|e_{n+1}| = C|e_n|^\alpha$$

Por lo tanto, $C = D^\alpha$ y $\alpha(\alpha - 1) = 1$.

$$\alpha(\alpha - 1) = 1 \Rightarrow \alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \sim 1.6$$

La convergencia es algo más lenta que en el método de Newton donde $\alpha = 2$.